Università degli Studi 'La Sapienza'

Facoltà di Economia

Anno accademico 2012 - 13

Matematica Finanziaria
Canale D - K

Capitolo 2
Rendite

Antonio Annibali

Capitolo 2 – Operazioni finanziarie composte

2.1 – Concetti di base

Una rendita corrisponde a un insieme di rate disponibili a determinate scadenze

$$\boxed{\mathop{\square}_{k=1}^{n}(R_k,t_k)}$$

Considerando un regime finanziario traslabile, si definisce valore capitale di una rendita la somma delle diverse rate, riportate finanziariamente a una determinata epoca e in particolare:

- ***Valore attuale o valore iniziale: valore capitale della rendita ad un'epoca T anteriore o uguale all'epoca iniziale t_1***

$$\boxed{V_T=\sum_{k=1}^{n}R_k\,v_{t_k-T}}$$

- ***Montante o valore finale: valore capitale della rendita ad un'epoca T posteriore o uguale all'epoca finale t_n***

$$\boxed{W_T=\sum_{k=1}^{n}R_k\,r_{T-t_k}}$$

- ***Valore (capitale): valore capitale della rendita ad un'epoca T intermedia rispetto agli estremi dell'intervallo (t_1,t_n)***

$$\boxed{A_T=\sum_{t_k\le T}R_s\,r_{T-t_k}+\sum_{t_k>T}R_s\,v_{t_k-T}}$$

Si definisce operazione finanziaria composta quell'operazione che scambia l'importo V_T o W_T oppure A_T (denominati valore) con la rendita delle n rate (denominata flusso degli importi o delle rate).

Nel caso di valore attuale si definisce cash-flow dell'operazione composta l'insieme del valore attuale e del flusso delle rate, che assume le seguenti forme, a seconda che si tratti di investimento oppure di finanziamento

$$\boxed{\left\{(-V_T, T), \bigcup_{k=1}^{n} (R_k, t_k)\right\}} \qquad \boxed{\left\{(V_T, T), \bigcup_{k=1}^{n} (-R_k, t_k)\right\}}$$

e analogamente nel caso di montante

$$\boxed{\left\{\bigcup_{k=1}^{n} (-R_k, t_k), (W_T, T)\right\}} \qquad \boxed{\left\{\bigcup_{k=1}^{n} (R_k, t_k), (-W_T, T)\right\}}$$

Una rendita si dice equiintervallata se gli intervalli di tempo tra due successive rate sono tutti uguali

$$\boxed{\bigcup_{k=1}^{n} (R_k, t + kw)}$$

e in tale caso risulta:

- ***Valore attuale: valore capitale della rendita ad un'epoca T anteriore o uguale all'epoca iniziale t + w***

$$\boxed{V_T = \sum_{k=1}^{n} R_k v^{(t+kw)-T}}$$

- ***Montante o valore finale: valore capitale della rendita ad un'epoca T posteriore o uguale all'epoca finale t + nw***

$$W_T = \sum_{k=1}^{n} R_k \, r_{T-(t+kw)}$$

- *Valore (capitale): valore capitale della rendita ad un'epoca T intermedia rispetto agli estremi dell'intervallo (t + w , t + nw)*

$$A_T = \sum_{(t+kw)\leq T} R_k \, r_{T-(t+kw)} + \sum_{(t+kw)>T} R_k \, v_{(t+kw)-T}$$

2.2 – Classificazione delle rendite

Ipotizzando di operare nell'ambito del regime finanziario della capitalizzazione composta con tasso d'interesse uniperiodale effettivo costante i (legge finanziaria traslabile e scindibile), il valore capitale della rendita ad una qualsiasi epoca T risulta

$$A_T = \sum_{k=1}^{n} R_k \, (1+i)^{T-t_k} = \sum_{k=1}^{n} R_k \, r^{T-t_k}$$

e le rendite possono essere classificate secondo diversi criteri:

- *periodiche (equiintervallate, in particolare uniintervallate) o non periodiche, a seconda che l'intervallo di tempo intercorrente tra due rate consecutive sia costante (in particolare, unitario) oppure no,*

- *costanti (in particolare: unitarie) o variabili, a seconda della costanza o meno dell'importo delle diverse rate,*

- *intere o frazionate, ossia discrete, oppure continue, a seconda che le rate siano riferite a periodi unitari (ad es. anno) oppure a frazionamenti di tali periodi unitari (ad es. semestri, quadrimestri, trimestri, bimestri, mesi, ecc.) oppure ad un insieme di tempi di tipo continuo (considerabile come caso limite di frazionamenti)*

- ***temporanee** o **perpetue**, a seconda che il numero delle rate sia finito oppure infinito,*

- ***anticipate** o **posticipate**, a seconda che le rate siano riferite all'epoca iniziale o all'epoca finale di ciascun periodo di riferimento della rendita,*

- ***immediate** o **differite**, a seconda che la prima rata sia riferita, oppure no, al primo periodo di riferimento della rendita.*

Esercizio 2.2 (1) - Valore capitale di una rendita >>>

2.3 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate variabili intere temporanee

Considerati diversi flussi d'importi, possono considerarsi diversi tipi di rendita e i relativi valori attuali al tempo iniziale:

- ***rendita immediata posticipata** di durata pari ad n periodi unitari*

$$\prod_{k=1}^{n}(R_k,k) \qquad V_0=\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{-k} \qquad W_n=\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{n-k}$$

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{n-k}=(1+i)^n\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{-k}=r^n\cdot V_0 \qquad \begin{aligned}V_0&=v^n\cdot W_n\\ W_n&=r^n\cdot V_0\end{aligned}$$

- ***rendita immediata anticipata** di durata pari ad n periodi unitari*

$$\prod_{k=1}^{n}(R_k,k-1) \qquad \ddot{V}_0=\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{-(k-1)}=(1+i)\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{-k}=rV_0$$

$$\ddot{W}_n = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-(k-1)} = (1+i)\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k} = r\,W_n$$

$$\ddot{V}_0 = v^n \cdot \ddot{W}_n \qquad \ddot{W}_n = r^n \cdot \ddot{V}_0$$

- ***rendita differita di t periodi posticipata* di durata pari ad n periodi unitari**

$$\prod_{k=1}^{n} (R_k, k+t)$$

$$_{t/}V_0 = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-(k+t)} = (1+i)^{-t}\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k} = v^t\, V_0$$

- ***rendita differita di t periodi anticipata* di durata pari ad n periodi unitari**

$$\prod_{k=1}^{n} (R_k, k+t-1)$$

$$_{t/}\ddot{V}_0 = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-(k+t-1)} = \begin{cases} (1+i)^{-t}\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-(k-1)} = v^t\, \ddot{V}_0 \\ (1+i)^{-(t-1)}\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-(k-1)} = v^{t-1}\, V_0 \end{cases}$$

Esercizio 2.3 (1) - Valori attuali e montanti >>>

- ***rendita immediata posticipata* di durata pari ad n periodi unitari, in *progressione aritmetica* di prima rata R e ragione p**

$$\prod_{k=1}^{n} (\overbrace{\underbrace{R+p(k-1)}_{R(1+\frac{p}{R}(k-1))}}^{R_k}, k) \quad g$$

$$^{a}V_0 = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} + p\sum_{k=1}^{n}(k-1)(1+i)^{-k} =$$

$$= (R-p)\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} + p\sum_{k=1}^{n} k(1+i)^{-k}$$

$$
{}^{a}W_n = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} + p\sum_{k=1}^{n}(k-1)(1+i)^{n-k} = \\
= (R-p)\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} + p\sum_{k=1}^{n}k(1+i)^{n-k}
$$

$$
{}^{a}V_0 = v^n \cdot {}^{a}W_n \qquad {}^{a}W_n = r^n \cdot {}^{a}V_0
$$

se p=0 (e quindi g=0), la rendita coincide con la rendita immediata posticipata costante di durata pari ad n periodi unitari

$$
\prod_{\substack{k=1 \\ R_k}}^{n}(R,k) \qquad {}^{=}V_0 = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} \qquad {}^{=}W_n = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} \qquad {}^{=}V_0 = v^n \cdot {}^{=}W_n \quad {}^{=}W_n = r^n \cdot {}^{=}V_0
$$

- ***rendita immediata anticipata di durata pari ad n periodi unitari, in progressione aritmetica di prima rata R e ragione p***

$$
\prod_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\overbrace{R+p(k-1)}^{R_k}}_{R(1+\underbrace{\frac{p}{R}}_{g}(k-1))},k-1\Big)
$$

$$
{}^{a}\ddot{V}_0 = R\sum_{k=0}^{n}(1+i)^{-(k-1)} + p\sum_{k=1}^{n-1}k(1+i)^{-(k-1)}
$$

$$
{}^{a}\ddot{W}_n = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-(k-1)} + p\sum_{k=1}^{n}k(1+i)^{n-(k-1)}
$$

$$
{}^{a}\ddot{V}_0 = v^n \cdot {}^{a}\ddot{W}_n \qquad {}^{a}\ddot{W}_n = r^n \cdot {}^{a}\ddot{V}_0
$$

se p=0 (e quindi g=0), la rendita coincide con la rendita immediata anticipata costante di durata pari ad n periodi unitari

$$
\prod_{\substack{k=1 \\ R_k}}^{n}(R,k-1) \qquad {}^{=}\ddot{V}_0 = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-(k-1)}
$$

$$
{}^{=}\ddot{W}_n = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-(k-1)} \qquad {}^{=}\ddot{V}_0 = v^n \cdot {}^{=}\ddot{W}_n \quad {}^{=}\ddot{W}_n = r^n \cdot {}^{=}\ddot{V}_0
$$

Esercizio 2.3 (2) - Rendite in progressione aritmetica >>>

- ***rendita immediata posticipata*** *di durata pari ad n periodi unitari, in* ***progressione geometrica*** *di prima rata R e di ragione q*

$$\boxed{\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{n}\Big(\overbrace{\underbrace{R\,q^{k-1}}_{R(1+g)^{k-1}}}^{R_k},k\Big)}\qquad \boxed{{}^{g}V_0 = R\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(1+i)^{-k} = \frac{R}{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-k}}$$

$$\boxed{{}^{g}W_n = R\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(1+i)^{n-k} = (1+i)^n\,\frac{R}{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-k}}\qquad \boxed{\begin{array}{l} {}^{g}V_0 = v^n \cdot {}^{g}W_n \\ {}^{g}W_n = r^n \cdot {}^{g}V_0 \end{array}}$$

se q=1 (e quindi g=0), la rendita coincide, come già visto, con la rendita immediata posticipata costante di durata pari ad n periodi unitari

- ***rendita immediata anticipata*** *di durata pari ad n periodi unitari, in* ***progressione geometrica*** *di prima rata R di ragione q*

$$\boxed{\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{n}\Big(\overbrace{\underbrace{R\,q^{k-1}}_{R(1+g)^{k-1}}}^{R_k},k-1\Big)}\qquad \boxed{{}^{g}\ddot{V}_0 = R\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(1+i)^{-(k-1)} = R\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-(k-1)}}$$

$$\boxed{{}^{g}\ddot{W}_n = R\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(1+i)^{n-(k-1)} = (1+i)^n\,R\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-(k-1)}}$$

$$\boxed{{}^{g}\ddot{V}_0 = v^n \cdot {}^{g}\ddot{W}_n \quad , \quad {}^{g}\ddot{W}_n = r^n \cdot {}^{g}\ddot{V}_0}$$

se q=1 (e quindi g=0), la rendita coincide, come già visto, con la rendita immediata anticipata costante di durata pari ad n periodi unitari

Esercizio 2.3 (3) - Rendite in progressione geometrica >>>

2.4 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate unitarie intere temporanee

Considerando rendite di durata pari a n periodi unitari, con eventuale differimento, (ipotizzando, anche per il seguito, $i > 0$) risulta

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{n} v^{k} = v\frac{1-v^{n}}{1-v} = \frac{1-v^{n}}{r-1} = \frac{1-v^{n}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- ***Montante di una rendita posticipata immediata***

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} = r^{n}\sum_{k=1}^{n} v^{k} = r^{n} a_{\overline{n}|i} = r^{n}\frac{1-v^{n}}{i} = \frac{r^{n}-1}{i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} v^{k-1} = r\sum_{k=1}^{n} v^{k} = r\, a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^{n}}{d} = \frac{i}{d} a_{\overline{n}|i}$$
$$= a_{\overline{n}|i} + i\, a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} + 1 - v^{n} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

- ***Montante di una rendita anticipata immediata***

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} r^{n-(k-1)} = r\sum_{k=1}^{n} r^{n-k} = r\, s_{\overline{n}|i} = \frac{r^{n}-1}{d} = \frac{i}{d} s_{\overline{n}|i}$$
$$= s_{\overline{n}|i} + i\, s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} + r^{n} - 1 - = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

- ***Valore attuale di una rendita posticipata differita di t periodi***

$$
{}_{t/}a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} v^{k+t} = v^t \sum_{k=1}^{n} v^k = v^t\, a_{\overline{n}|i} = v^t\, \frac{1-v^n}{i} = \frac{v^t - v^{n+t}}{i} = \\ = \frac{1-v^{n+t} - (1-v^t)}{i} = a_{\overline{n+t}|i} - a_{\overline{t}|i}
$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata differita di t periodi***

$$
{}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} v^{k+t-1} = r \sum_{k=1}^{n} v^{k+t} = r\; {}_{t/}a_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n+t}|i} - \ddot{a}_{\overline{t}|i} = {}_{t-1/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+t-1}|i} - a_{\overline{t-1}|i}
$$

Esercizio 2.4 (1) - Rendite: valori attuali e montanti >>>

Esercizio 2.4 (2) - Rendite: valori attuali >>>

Esercizio 2.4 (3) - Rendite: modifica delle condizioni >>>

Esercizio

Valori attuali e montanti di rendite posticipate e anticipate immediate nell'ipotesi che il tasso di interesse risulti nullo o negativo

$$
a_{\overline{n}|0} = \sum_{k=1}^{n} 1^{-k} = n \;\; \dots \;\; = s_{\overline{n}|0} = \ddot{a}_{\overline{n}|0} = \ddot{s}_{\overline{n}|0}
$$

$$
\frac{1}{1-i} = 1+h \Rightarrow \\ \Rightarrow h = \frac{i}{1-i}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|-i} &= \sum_{k=1}^{n} (1-i)^{-k} = \sum_{k=1}^{n} (1+h)^{k} = \ddot{s}_{\overline{n}|h} = \ddot{s}_{\overline{n}|\frac{i}{1-i}} \\
s_{\overline{n}|-i} &= (1-i)^n\, a_{\overline{n}|-i} = (1+h)^{-n}\, \ddot{s}_{\overline{n}|h} = \ddot{a}_{\overline{n}|h} = \ddot{a}_{\overline{n}|\frac{i}{1-i}} \\
\ddot{a}_{\overline{n}|-i} &= (1-i)\; a_{\overline{n}|-i} = (1+h)^{-1}\, \ddot{s}_{\overline{n}|h} = s_{\overline{n}|h} = s_{\overline{n}|\frac{i}{1-i}} \\
\ddot{s}_{\overline{n}|-i} &= (1-i)\; s_{\overline{n}|-i} = (1+h)^{-1}\, \ddot{a}_{\overline{n}|h} = a_{\overline{n}|h} = a_{\overline{n}|\frac{i}{1-i}}
\end{aligned}
$$

2.5 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate unitarie intere perpetue

Considerando rendite di durata infinita, risulta

- *Valore attuale di una rendita posticipata immediata*

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

- *Valore attuale di una rendita anticipata immediata*

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d} = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} = 1 + a_{\overline{\infty}|i}$$

- *Valore attuale di una rendita posticipata differita di t periodi*

$$_{t/}a_{\overline{\infty}|i} = v^t a_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} - a_{\overline{t}|i} = \frac{1}{i} - \frac{1-v^t}{i} = \frac{v^t}{i}$$

- *Valore attuale di una rendita anticipata differita di t periodi*

$$_{t/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = v^t \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} - \ddot{a}_{\overline{t}|i} = \frac{1}{d} - \frac{1-v^t}{d} = \frac{v^t}{d} = \frac{v^{t-1}}{i}$$

Esercizio 2.5 (1) - Rendite perpetue: valutazione >>>

Esercizio 2.5 (2) - Rendite perpetue: calcolo del tasso >>>

2.6 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate unitarie frazionate temporanee

Considerando rendite di durata pari a n periodi unitari, risulta

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m} a_{\overline{nm}|i_{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm} v^{k}_{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\frac{1-v^{nm}_{\frac{1}{m}}}{i_{\frac{1}{m}}} = \frac{1-(v^{m}_{\frac{1}{m}})^{n}}{m\, i_{\frac{1}{m}}} = \frac{1-v^{n}}{j_m} = \frac{i}{j_m} a_{\overline{n}|i}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m} \ddot{a}_{\overline{nm}|i_{\frac{1}{m}}} = r^{\frac{1}{m}} a^{(m)}_{\overline{n}|i} = r^{\frac{1}{m}} \frac{i}{j_m} a_{\overline{n}|i} = \frac{v\, i}{v^{\frac{1}{m}} j_m} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\rho_m} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^{n}}{\rho_m}$$

- ***Montante di una rendita posticipata immediata***

$$s^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m} s_{\overline{nm}|i_{\frac{1}{m}}} = r^{n} a^{(m)}_{\overline{n}|i} = r^{n} \frac{i}{j_m} a_{\overline{n}|i} = \frac{i}{j_m} s_{\overline{n}|i} = \frac{r^{n}-1}{j_m}$$

- ***Montante di una rendita anticipata immediata***

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m} \ddot{s}_{\overline{nm}|i_{\frac{1}{m}}} = r^{\frac{1}{m}} s^{(m)}_{\overline{n}|i} = r^{\frac{1}{m}} \frac{i}{j_m} s_{\overline{n}|i} = \frac{v\, i}{v^{\frac{1}{m}} j_m} \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\rho_m} \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{r^{n}-1}{\rho_m}$$

Esercizio 2.6 (1) - Rendite frazionate: valutazione >>>

Esercizio 2.6 (2) - Rendite frazionate: valutazione >>>

2.7 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate unitarie frazionate perpetue

Considerando rendite di durata infinita, risulta

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$a_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_m}\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{i}{j_m}\frac{1}{i} = \frac{1}{j_m} = \frac{1-\frac{\rho_m}{m}}{\rho_m} = \frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{m}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{d}{\rho_m}\lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\rho_m}\frac{1}{d} = \frac{1}{\rho_m} = \frac{1+\frac{j_m}{m}}{j_m} = \frac{1}{j_m} + \frac{1}{m}$$

2.8 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate unitarie continue temporanee

Considerando rendite di durata pari a n periodi unitari, risulta

- ***Valore attuale di una rendita immediata***

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \left\{\begin{array}{l} a_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\frac{i}{j_m} a_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta}\frac{1-v^n}{i} \\ \ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\frac{d}{\rho_m} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\delta}\frac{1-v^n}{d} \end{array}\right\} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$$

- ***Montante di una rendita immediata***

$$\bar{s}_{\overline{n}|i} = \left\{\begin{array}{l} s_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} s_{\overline{n}|i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\frac{i}{j_m} s_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta} s_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta}\frac{r^n-1}{i} \\ \ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} \ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\frac{d}{\rho_m} \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\delta} \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\delta}\frac{r^n-1}{d} \end{array}\right\} = \frac{r^n-1}{\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$$

2.9 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate unitarie continue perpetue

- *Valore attuale di una rendita di durata infinita*

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|i} = \begin{cases} a^{(\infty)}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a^{(\infty)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta}\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta}\frac{1}{i} \\ \ddot{a}^{(\infty)}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}^{(\infty)}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\delta}\lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\delta}\frac{1}{d} \end{cases} = \frac{1}{\delta}$$

I diversi risultati possono essere riepilogati nei seguenti schemi:

	Temp post	Temp ant	Perp post	Perp ant
Intera	$a_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{d}$	$a_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{d}$
Fraz	$a^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{j_m}$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{\rho_m}$	$a^{(m)}_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{j_m}$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{\rho_m}$
Cont	$\bar{a}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$	$\Leftarrow$	$\bar{a}_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{\delta}$	$\Leftarrow$

	Temp post	Temp ant
Intera	$s_{\overline{n}\|i} = \frac{r^n-1}{i}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\|i} = \frac{r^n-1}{d}$
Fraz	$s^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{r^n-1}{j_m}$	$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{r^n-1}{\rho_m}$
Cont	$\bar{s}_{\overline{n}\|i} = \frac{r^n-1}{\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$	$\Leftarrow$

Esercizio 2.9 (1) - Rendite continue: valutazione >>>

I diversi risultati ottenuti con riguardo alle rendite continue (temporanee e perpetue)

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \qquad \bar{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{\delta} \qquad \bar{s}_{\overline{n}|i} = \frac{r^n-1}{\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$$

possono essere ottenuti direttamente, infatti

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \int_0^n e^{-\delta t}dt = \left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta}\right]_0^n = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \qquad \bar{a}_{\overline{\infty}|i} = \int_0^\infty e^{-\delta t}dt = \left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta}\right]_0^\infty = \frac{1}{\delta}$$

$$\bar{s}_{\overline{n}|i} = \int_0^n e^{\delta(n-t)}dt = \left[\frac{e^{\delta(n-t)}}{-\delta}\right]_0^n = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$$

In generale, considerando un tasso istantaneo di tipo variabile, le formule scritte in precedenza si trasformano in

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \int_0^n e^{-\int_0^t \delta_w dw} dt \qquad \bar{a}_{\overline{\infty}|i} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \delta_w dw} dt \qquad \bar{s}_{\overline{n}|i} = \int_0^n e^{\int_t^n \delta_w dw} dt$$

2.6…9 bis – Valori attuali e montanti: valutazioni approssimate

Ricordando le formule approssimate relative ai tassi nominali di interesse e di sconto

$$j_m \simeq i\left(1-\frac{m-1}{2m}i\right) \qquad \rho_m \simeq d\left(1+\frac{m-1}{2m}d\right)$$

è possibile costruire le espressioni approssimate dei fattori correttivi relativi alle formule delle rendite frazionate

$$\frac{i}{j_m} \simeq \frac{i}{i\left(1-\frac{m-1}{2m}i\right)} = \frac{1}{1-\frac{m-1}{2m}i} \simeq 1+\frac{m-1}{2m}i$$

$$\frac{d}{\rho_m} \simeq \frac{d}{d\left(1+\frac{m-1}{2m}d\right)} = \frac{1}{1+\frac{m-1}{2m}d} \simeq 1-\frac{m-1}{2m}d$$

da cui, nel caso di durata finita, risulta

- *Valore attuale di una rendita frazionata posticipata immediata*

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{j_m} a_{\overline{n}|i} \simeq \left(1+\frac{m-1}{2m}i\right)a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} + \frac{m-1}{2m}(1-v^n)$$

- *Valore attuale di una rendita frazionata anticipata immediata*

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\rho_m}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \simeq \left(1-\frac{m-1}{2m}d\right)\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} - \frac{m-1}{2m}(1-v^n)$$

- *Montante di una rendita frazionata posticipata immediata*

$$s^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{j_m} s_{\overline{n}|i} \simeq \left(1+\frac{m-1}{2m}i\right)s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} + \frac{m-1}{2m}(r^n-1)$$

- *Montante di una rendita frazionata anticipata immediata*

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{\rho_m}\ddot{s}_{\overline{n}|i} \simeq \left(1-\frac{m-1}{2m}d\right)\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} - \frac{m-1}{2m}(r^n-1)$$

Esercizio 2.6 (3) - Rendite frazionate: valutazione appross >>>

e nel caso di durata infinita

- *Valore attuale di una rendita posticipata immediata*

$$\boxed{a_{\overline{\infty|}i}^{(m)} = \frac{i}{j_m} a_{\overline{\infty|}i} \simeq \left(1 + \frac{m-1}{2m} i\right)\frac{1}{i} = \frac{1}{i} + \frac{m-1}{2m}}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty|}i}^{(m)} = \frac{d}{\rho_m} \ddot{a}_{\overline{\infty|}i} \simeq \left(1 - \frac{m-1}{2m} d\right)\frac{1}{d} = \frac{1}{d} - \frac{m-1}{2m}}$$

Ricordando le formule approssimate relative al tasso istantaneo (di interesse e di sconto)

$$\boxed{\delta \simeq i\left(1 - \frac{i}{2}\right)} \qquad \boxed{\delta \simeq d\left(1 + \frac{d}{2}\right)}$$

è possibile costruire le espressioni approssimate dei fattori correttivi relativi alle formule delle rendite continue

$$\boxed{\frac{i}{\delta} \simeq \frac{i}{i\left(1 - \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} \simeq 1 + \frac{i}{2}} \qquad \boxed{\frac{d}{\delta} \simeq \frac{d}{d\left(1 + \frac{d}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{d}{2}} \simeq 1 - \frac{d}{2}}$$

da cui, nel caso di durata finita, risulta

- ***Valore attuale di una rendita immediata***

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{n|}i} = \begin{cases} \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}i} \simeq \left(1 + \frac{i}{2}\right) a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i} + \frac{1}{2}(1 - v^n) \\ \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{\overline{n|}i} \simeq \left(1 - \frac{d}{2}\right) \ddot{a}_{\overline{n|}i} = \ddot{a}_{\overline{n|}i} - \frac{1}{2}(1 - v^n) \end{cases} = \frac{a_{\overline{n|}i} + \ddot{a}_{\overline{n|}i}}{2}}$$

- ***Montante di una rendita immediata***

$$\bar{s}_{\overline{n}|i}=\begin{cases}\dfrac{i}{\delta}s_{\overline{n}|i}\simeq\left(1+\dfrac{i}{2}\right)s_{\overline{n}|i}=s_{\overline{n}|i}+\dfrac{1}{2}(r^n-1)\\ \dfrac{d}{\delta}\ddot{s}_{\overline{n}|i}\simeq\left(1-\dfrac{d}{2}\right)\ddot{s}_{\overline{n}|i}=\ddot{s}_{\overline{n}|i}-\dfrac{1}{2}(r^n-1)\end{cases}=\frac{s_{\overline{n}|i}+\ddot{s}_{\overline{n}|i}}{2}$$

e nel caso di durata infinita

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|i}=\begin{cases}\dfrac{i}{\delta}a_{\overline{\infty}|i}\simeq\left(1+\dfrac{i}{2}\right)\dfrac{1}{i}=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{d}{\delta}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}\simeq\left(1-\dfrac{d}{2}\right)\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{2}\end{cases}=\frac{\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{d}}{2}=\frac{a_{\overline{\infty}|i}+\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{2}$$

I diversi risultati possono essere riepilogati nei seguenti schemi:

	Temp post	Temp ant
Fraz	$a^{(m)}_{\overline{n}|i}\simeq a_{\overline{n}|i}+\dfrac{m-1}{2m}(1-v^n)$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i}\simeq \ddot{a}_{\overline{n}|i}-\dfrac{m-1}{2m}(1-v^n)$
Cont	$\bar{a}_{\overline{n}|i}\simeq a_{\overline{n}|i}+\dfrac{1}{2}(1-v^n)$	$\bar{a}_{\overline{n}|i}\simeq \ddot{a}_{\overline{n}|i}-\dfrac{1}{2}(1-v^n)$

...

...

	Perp post	Perp ant
Fraz	$a^{(m)}_{\overline{\infty}|i}\simeq\dfrac{1}{i}+\dfrac{m-1}{2m}$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|i}\simeq\dfrac{1}{d}-\dfrac{m-1}{2m}$
Cont	$\bar{a}_{\overline{\infty}|i}\simeq\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2}$	$\bar{a}_{\overline{\infty}|i}\simeq\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{2}$

	Temp post	Temp ant
Fraz	$s^{(m)}_{\overline{n}|i}\simeq s_{\overline{n}|i}+\dfrac{m-1}{2m}(r^n-1)$	$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i}\simeq \ddot{s}_{\overline{n}|i}-\dfrac{m-1}{2m}(r^n-1)$
Cont	$\bar{s}_{\overline{n}|i}=s_{\overline{n}|i}+\dfrac{1}{2}(r^n-1)$	$\bar{s}_{\overline{n}|i}=\ddot{s}_{\overline{n}|i}-\dfrac{1}{2}(r^n-1)$

2.10 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate variabili (in progressione aritmetica) intere temporanee e perpetue

Considerando rendite temporanee di durata pari ad n periodi unitari, risulta

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$(Ia)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n}(1+g(k-1))v^k = (1-g)\sum_{k=1}^{n}v^k + g\sum_{k=1}^{n}kv^k =$$

$$= (1-g)\,a_{\overline{n}|i} + g\sum_{k=1}^{n}kv^k = \ldots \qquad \boxed{g = \frac{p}{R}}$$

$$\underbrace{(Ia)_{\overline{n}|i}}_{(g=1)} = \sum_{k=1}^{n}kv^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{k}v^k = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=h}^{n}v^k = \sum_{h=1}^{n}{}_{/h-1}a_{\overline{n-h+1}|i} = \sum_{h=1}^{n}\left(v^{h-1}\cdot\frac{1-v^{n-h+1}}{i}\right) =$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{n}(v^{h-1}-v^n)}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = \frac{\frac{1-v^n}{d} - nv^n}{i} = \frac{1-v^n(1+nd)}{i\,d}$$

$$(Ia)^{(g)}_{\overline{n}|i} = (1-g)\,a_{\overline{n}|i} + g\,(Ia)_{\overline{n}|i} = (1-g)a_{\overline{n}|i} + g\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} \qquad (Ia)^{(o)}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\underbrace{(I\ddot{a})_{\overline{n}|i}}_{(g=1)} = r\,(Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{d} = \frac{r\,(1+a_{\overline{n-1}|i}) - nv^{n-1}}{i} =$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n-1}|i} + r - (n-1)v^{n-1} - v^{n-1}}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n-1}|i} - (n-1)v^{n-1}}{i} + r\,\frac{1-v^n}{i} = (Ia)_{\overline{n-1}|i} + \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$$(I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|i} = (1-g)\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + g\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|i} = (1-g)\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + g\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{d} \qquad (I\ddot{a})^{(o)}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

- ***Montante di una rendita posticipata immediata***

$$\boxed{\underbrace{(Is)_{\overline{n}|i}}_{(g=1)} = r^n\,(Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{i}}$$

$$\boxed{(Is)^{(g)}_{\overline{n}|i} = (1-g)\,s_{\overline{n}|i} + g\,(Is)_{\overline{n}|i} = (1-g)s_{\overline{n}|i} + g\,\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{i}} \qquad \boxed{(Is)^{(o)}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}}$$

- ***Montante di una rendita anticipata immediata***

$$\boxed{\begin{aligned}\underbrace{(I\ddot{s})_{\overline{n}|i}}_{(g=1)} &= r\,(Is)_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{d} = \frac{r\,(s_{\overline{n+1}|i} - 1) - nr}{i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n+1}|i} - (n+1)r}{i} = \\ &= \frac{\ddot{s}_{\overline{n+1}|i} - (n+1)}{i} - \frac{(n+1)\,i}{i} = (Is)_{\overline{n+1}|i} - (n+1)\end{aligned}}$$

$$\boxed{(I\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i} = (1-g)\,\ddot{s}_{\overline{n}|i} + g\,(I\ddot{s})_{\overline{n}|i} = (1-g)\,\ddot{s}_{\overline{n}|i} + g\,\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{d}} \qquad \boxed{(I\ddot{s})^{(o)}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}}$$

<u>Esercizio</u>

Valore attuale (caso: g=1) di una rendita temporanea posticipata differita di t periodi

$$\boxed{\begin{aligned}{}_{t/}(Ia)_{\overline{n}|i} &= \frac{{}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^{n+t}}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n+t}|i} - \ddot{a}_{\overline{t}|i} - (n+t)v^{n+t} + t\,v^{n+t} - t\,v^t + t\,v^t}{i} = \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n+t}|i} - (n+t)v^{n+t}}{i} - \frac{\ddot{a}_{\overline{t}|i} - t\,v^t}{i} - \frac{t\,v^t(1-v^n)}{i} = \\ &= (Ia)_{\overline{n+t}|i} - (Ia)_{\overline{t}|i} - t\;{}_{t/}a_{\overline{n}|i}\end{aligned}}$$

Considerando rendite di durata infinita, risulta

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$(Ia)_{\overline{\infty}|i} = \sum_{k=1}^{\infty} k v^k = \lim_{n\to\infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n v^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{i} = \frac{1}{i\,d} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2}$$

$$(Ia)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = (1-g)\,a_{\overline{\infty}|i} + g\,\frac{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{i} = \frac{1-g}{i} + \frac{g}{i\,d} = \frac{i+g}{i^2} = \frac{1}{i} + \frac{g}{i^2}$$

$$(Ia)^{(o)}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|i} = r\,(Ia)_{\overline{\infty}|i} = \frac{r}{i\,d} = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{i\,d}$$

$$(I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = (1-g)\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} + g\,\frac{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{d} = \frac{1-g}{d} + \frac{g}{d^2} = \frac{i+g}{i\,d} = \frac{1}{d} + \frac{g}{i\,d}$$

$$(I\ddot{a})^{(o)}_{\overline{\infty}|i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d}$$

Esercizio

Valore attuale (caso: g=1) di una rendita perpetua posticipata differita di t periodi

$$_{t/}(Ia)_{\overline{\infty}|i} = (Ia)_{\overline{\infty}|i} - (Ia)_{\overline{t}|i} - t\; _{t/}a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i\,d} - \frac{\ddot{a}_{\overline{t}|i} - t v^t}{i} - \frac{t v^t}{i} = \frac{v^t}{i\,d} = \frac{v^{t-1}}{i^2}$$

Esercizio 2.10 (1) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Esercizio 2.10 (2) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Esercizio 2.11 (3) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Esercizio

Valori attuali e montanti di rendite posticipate e anticipate immediate nell'ipotesi di ragione pari all'opposto del tasso di interesse

$$(Ia)^{(-i)}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i} - i\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} - \ddot{a}_{\overline{n}|i} + nv^n = nv^n$$

$$(I\ddot{a})^{(-i)}_{\overline{n}|i} = (1+i)\ddot{a}_{\overline{n}|i} - i\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{d} = (1+i)(\ddot{a}_{\overline{n}|i} - \ddot{a}_{\overline{n}|i} + nv^n) = nv^{n-1}$$

$$(Is)^{(-i)}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i} - i\,\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} - \ddot{s}_{\overline{n}|i} + n = n$$

$$(I\ddot{s})^{(-i)}_{\overline{n}|i} = (1+i)\ddot{s}_{\overline{n}|i} - i\,\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{d} = (1+i)(\ddot{s}_{\overline{n}|i} - \ddot{s}_{\overline{n}|i} + n) = n\,r$$

$$(Ia)^{(-i)}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)a_{\overline{\infty}|i} - i\,\frac{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{i} = \frac{1+i}{i} - \frac{i}{i\,d} = 0$$

$$(I\ddot{a})^{(-i)}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} - i\,\frac{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{d} = \frac{1+i}{d} - \frac{i}{d^2} = 0$$

Esercizio

Valori attuali e montanti di rendite posticipate e anticipate immediate nell'ipotesi di tasso di interesse nullo

$$\left.\begin{array}{l}(Ia)^{(g)}_{\overline{n}|0}\\ (I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|0}\\ (Is)^{(g)}_{\overline{n}|0}\\ (I\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|0}\end{array}\right\} = \sum_{k=1}^{n}(1+g(k-1)) = \left\{\begin{array}{l}\underbrace{(Ia)^{(0)}_{\overline{n}|0} = n}_{0=i=g}\\ \underbrace{(Ia)^{(g)}_{\overline{n}|0} = n\left(1+\frac{g(n-1)}{2}\right)}_{0=i\neq g}\end{array}\right.$$

2.11 – Valori attuali e montanti: rendite uniintervallate variabili (in progressione geometrica) intere temporanee e perpetue

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$\boxed{\begin{aligned}(Ga)_{\overline{n}|i}^{(g)} &= \sum_{k=1}^{n}\underbrace{(1+g)^{k-1}v^{k}}_{q} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^{-k}}{1+g} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i-g}{1+g}\right)^{-k}}{1+g} \\ &= \begin{cases}\underbrace{(Ga)_{\overline{n}|i}^{(i)} = \frac{n}{1+i}}_{i=g} \\ \underbrace{(Ga)_{\overline{n}|i}^{(g)} = \frac{a_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}{1+g} = \frac{1-\left(1+\frac{i-g}{1+g}\right)^{-n}}{\frac{i-g}{1+g}(1+g)} = \frac{1-\left(1+\frac{i-g}{1+g}\right)^{-n}}{i-g}}_{i\neq g}\end{cases}\end{aligned}}$$

$$\boxed{(Ga)_{\overline{n}|i}^{(o)} = a_{\overline{n}|i}}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\boxed{(G\ddot{a})_{\overline{n}|i}^{(g)} = r\,(Ga)_{\overline{n}|i}^{(g)} = \begin{cases}\underbrace{(G\ddot{a})_{\overline{n}|i}^{(i)} = n}_{i=g} \\ \underbrace{(G\ddot{a})_{\overline{n}|i}^{(g)} = \frac{1+i}{1+g}\,a_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}} = \ddot{a}_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i\neq g}\end{cases}} \qquad \boxed{(G\ddot{a})_{\overline{n}|i}^{(o)} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

- ***Montante di una rendita posticipata immediata***

$$\boxed{(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i} = r^n\,(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{(Gs)^{(i)}_{\overline{n}|i} = r^{n-1}\,n}_{i=g} \\ \underbrace{(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i} = (1+g)^{n-1}\,s_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i\neq g} \end{cases}} \qquad \boxed{(Gs)^{(o)}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}}$$

- ***Montante di una rendita anticipata immediata***

$$\boxed{(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i} = r\,(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{(G\ddot{s})^{(i)}_{\overline{n}|i} = r^{n}\,n}_{i=g} \\ \underbrace{(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i} = (1+g)^{n}\,\ddot{s}_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i\neq g} \end{cases}} \qquad \boxed{(G\ddot{s})^{(o)}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}}$$

- ***Valore attuale di una rendita posticipata immediata***

$$\boxed{(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \sum_{k=1}^{\infty}(1+g)^{k-1}v^k = \frac{1}{1+g}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^{-k} = \begin{cases} \underbrace{(Ga)^{(i)}_{\overline{\infty}|i} \to +\infty}_{i\le g} \\ \underbrace{(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i-g}}_{i>g} \end{cases}}$$

$$\boxed{(Ga)^{(o)}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}}$$

- ***Valore attuale di una rendita anticipata immediata***

$$\boxed{(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = r\,(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \begin{cases} \underbrace{(G\ddot{a})^{(i)}_{\overline{\infty}|i} \to +\infty}_{i\le g} \\ \underbrace{(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1+i}{i-g}}_{i>g} \end{cases}} \qquad \boxed{(G\ddot{a})^{(o)}_{\overline{\infty}|i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d}}$$

Esercizio 2.11 (1) - Rendite in progressione geometrica >>>

Esercizio 2.11 (2) - Rendite in progressione geometrica >>>

Esercizio 2.11 (3) - Rendite in progressione geometrica >>>

<u>Esercizio</u>

Valori attuali e montanti di rendite posticipate e anticipate immediate nell'ipotesi di tasso di interesse nullo

$$\left.\begin{matrix}(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|0}\\(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|0}\\(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|0}\\(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|0}\end{matrix}\right\}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(1+g)^{k-1}}_{q}=\begin{cases}\underbrace{(Ga)^{(0)}_{\overline{n}|0}=n}_{0=i=g}\\[2ex]\underbrace{(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|0}=\dfrac{a_{\overline{n}|-\frac{g}{1+g}}}{1+g}=\dfrac{\ddot{s}_{\overline{n}|g}}{1+g}=s_{\overline{n}|g}}_{0=i\neq g}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|0}\\(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|0}\end{matrix}\right\}=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(1+g)^{k-1}}_{q}=\begin{cases}\underbrace{(Ga)^{(0)}_{\overline{\infty}|0}\rightarrow+\infty}_{i=0\leq g}\\[2ex]\underbrace{(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|0}=-\dfrac{1}{g}}_{i=0>g}\end{cases}$$

<u>2.12 – Problemi relativi alle rendite: ricerca del valore attuale e del montante, della rata, della durata e del tasso di interesse/sconto</u>

- ***Ricerca del valore attuale e del montante di una rendita costante intera***

$$\boxed{A=R\,a_{\overline{n}|i}=R\frac{1-v^{n}}{i}} \qquad \boxed{A=R\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}=R\frac{1-v^{n}}{d}}$$

$$A = R\ {}_{t/}a_{\overline{n}|i} = R\,\frac{v^t - v^{n+t}}{i}$$ $$A = R\ {}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{v^t - v^{n+t}}{d}$$

$$A = R\,a_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{i}$$ $$A = R\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{d}$$

$$A = R\ {}_{t/}a_{\overline{\infty}|i} = \frac{R v^t}{i}$$ $$A = R\ {}_{t/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R v^t}{d}$$

$$S = R\,s_{\overline{n}|i} = R\,\frac{r^n - 1}{i}$$ $$S = R\,\ddot{s}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{r^n - 1}{d}$$

- ***Ricerca della rata di una rendita costante intera***

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} = A\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{Ai}{1 - v^n}$$ $$R = \frac{A}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} = A\ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} = \frac{Ad}{1 - v^n}$$

$$R = \frac{A}{{}_{t/}a_{\overline{n}|i}} = A\ {}_{t/}\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{Ai}{v^t - v^{n+t}}$$ $$R = \frac{A}{{}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}} = A\ {}_{t/}\ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} = \frac{Ad}{v^t - v^{n+t}}$$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{\infty}|i}} = A\alpha_{\overline{\infty}|i} = Ai$$ $$R = \frac{A}{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}} = A\ddot{\alpha}_{\overline{\infty}|i} = Ad$$

$$R = \frac{A}{{}_{t/}a_{\overline{\infty}|i}} = A\ {}_{t/}\alpha_{\overline{\infty}|i} = Ai\,r^t$$ $$R = \frac{A}{{}_{t/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}} = A\ {}_{t/}\ddot{\alpha}_{\overline{\infty}|i} = Ad\,r^t$$

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = S\,\sigma_{\overline{n}|i} = \frac{Si}{r^n - 1}$$ $$R = \frac{S}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = S\,\ddot{\sigma}_{\overline{n}|i} = \frac{Sd}{r^n - 1}$$

Nota:

$$\alpha_{\overline{n}|i} - \sigma_{\overline{n}|i} = \frac{i}{1-v^n} - \frac{i}{r^n-1} = i\left(\frac{r^n}{r^n-1} - \frac{1}{r^n-1}\right) = i$$

$$\ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} - \ddot{\sigma}_{\overline{n}|i} = \frac{d}{1-v^n} - \frac{d}{r^n-1} = d\left(\frac{r^n}{r^n-1} - \frac{1}{r^n-1}\right) = d$$

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \sigma_{\overline{n}|i} + i \qquad \sigma_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i} - i \qquad \ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} = \ddot{\sigma}_{\overline{n}|i} + d \qquad \ddot{\sigma}_{\overline{n}|i} = \ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} - d$$

- ***Ricerca della durata di una rendita costante intera***

$$\underbrace{\frac{A}{R}}_{a} = a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} \Rightarrow v^n = 1 - a\,i \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\,i}_{a<\frac{1}{i}=a_{\overline{\infty}|i}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\,i)}{lg(1+i)}$$

$$\underbrace{\frac{A}{R}}_{a} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{d} \Rightarrow v^n = 1 - a\,d \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\,d}_{a<\frac{1}{d}=\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\,d)}{lg(1+i)}$$

$$\underbrace{\frac{A}{R}}_{a} = {}_{t/}a_{\overline{n}|i} = \frac{v^t - v^{n+t}}{i} \Rightarrow v^n = 1 - a\,i\,r^t \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\,i\,r^t}_{a<\frac{v^t}{i}={}_{t/}a_{\overline{\infty}|i}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\,i\,r^t)}{lg(1+i)}$$

$$\underbrace{\frac{A}{R}}_{a} = {}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{v^t - v^{n+t}}{d} \Rightarrow v^n = 1 - a\,d\,r^t \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\,d\,r^t}_{a<\frac{v^t}{d}={}_{t/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\,d\,r^t)}{lg(1+i)}$$

$$\underbrace{\frac{S}{R}}_{s} = s_{\overline{n}|i} = \frac{r^n-1}{i} \Rightarrow r^n = 1 + si \Rightarrow n = \frac{lg(1+si)}{lg(1+i)}$$

$$\frac{S}{R} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{r^n - 1}{d} \Rightarrow r^n = 1 + sd \Rightarrow n = \frac{lg(1+sd)}{lg(1+i)}$$

s

- ***Ricerca del tasso d'interesse di una rendita costante intera***

$$a = a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{r^n - 1}{i\,r^n} \Rightarrow a\,r^n(r-1) = r^n - 1$$
$$\Rightarrow a\,r^{n+1} - a\,r^n - r^n + 1 = 0 \Rightarrow a\,r^{n+1} - (a+1)r^n + 1 = 0$$

è un'equazione trinomia di grado n+1 nell'incognita r, la quale presenta l'immediata soluzione r = 1, ossia i = 0, e poiché presenta due variazioni di segno nei coefficienti, per il teorema di Cartesio, presenta un'altra soluzione positiva, che si può dimostrare essere unica e tale per cui r > 1 ossia i > 0. Tale tasso, denominato T.I.R. (Tasso Interno di Rendimento) ovvero I.R.R. (Internal Rate of Return) può essere calcolato con metodi di tipo numerico, anche nel caso di rendite con rate non costanti, ma tutte dello stesso segno.

Analogamente risulta

$$a = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{d} = \frac{r^n - 1}{i\,r^{n-1}} \Rightarrow a\,r^{n-1}(r-1) = r^n - 1$$
$$\Rightarrow a\,r^n - a\,r^{n-1} - r^n + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)r^n - a\,r^{n-1} + 1 = 0$$

$$a = {}_{t/}a_{\overline{n}|i} = \frac{v^t - v^{n+t}}{i} = \frac{r^n - 1}{i\,r^{n+t}} \Rightarrow a\,r^{n+t}(r-1) = r^n - 1$$
$$\Rightarrow a\,r^{n+t+1} - a\,r^{n+t} - r^n + 1 = 0$$

$$a = {}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{v^t - v^{n+t}}{d} = \frac{r^n - 1}{i\,r^{n+t-1}} \Rightarrow a\,r^{n+t-1}(r-1) = r^n - 1$$
$$\Rightarrow a\,r^{n+t} - a\,r^{n+t-1} - r^n + 1 = 0$$

$$s = s_{\overline{n}|i} = \frac{r^n - 1}{i} \Rightarrow s(r-1) = r^n - 1 \Rightarrow r^n - sr + s + 1 = 0$$

$$s = \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{r^n - 1}{d} \Rightarrow s(r-1) = r^{n+1} - r \Rightarrow r^{n+1} - (s+1)r + s = 0$$

Nota: Ipotizzando rendite variabili uniintervallate posticipate, le equazioni del T.I.R., per il valore attuale e di montante, risultano

$$A = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k} \qquad S = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k}$$

- ***Ricerca del valore attuale e del montante di una rendita costante frazionata (rata R intera da suddividere in m rate frazionate di importo $R_{1/m}$ pari ad un 1/m di R)***

$$A = R\, a^{(m)}_{\overline{n}|i} = R\frac{1-v^n}{j_m} = R_{\frac{1}{m}} \frac{1-v^n}{i_{\frac{1}{m}}} \qquad A = R\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = R\frac{1-v^n}{\rho_m} = R_{\frac{1}{m}} \frac{1-v^n}{d_{\frac{1}{m}}}$$

$$A = R\, a^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{j_m} = \frac{R_{\frac{1}{m}}}{i_{\frac{1}{m}}} \qquad A = R\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{\rho_m} = \frac{R_{\frac{1}{m}}}{d_{\frac{1}{m}}}$$

$$S = R\, s^{(m)}_{\overline{n}|i} = R\frac{r^n-1}{j_m} = R_{\frac{1}{m}} \frac{r^n-1}{i_{\frac{1}{m}}} \qquad S = R\, \ddot{s}^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = R\frac{r^n-1}{\rho_m} = R_{\frac{1}{m}} \frac{r^n-1}{d_{\frac{1}{m}}}$$

- ***Ricerca della rata di una rendita costante frazionata***

$$R = \frac{A}{a^{(m)}_{\overline{n}|i}} = A\alpha^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{A\, j_m}{1-v^n}\ ,\ R_{\frac{1}{m}} = \frac{A\, i_{\frac{1}{m}}}{1-v^n}$$

$$R = \frac{A}{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i}} = A\ddot{\alpha}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{A\rho_m}{1-v^n} \; , \; R_{\frac{1}{m}} = \frac{Ad_{\frac{1}{m}}}{1-v^n}$$

$$R = \frac{A}{a^{(m)}_{\overline{\infty}|i}} = A\alpha^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = A\,j_m \; , \; R_{\frac{1}{m}} = Ai_{\frac{1}{m}}$$

$$R = \frac{A}{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|i}} = A\ddot{\alpha}^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = A\rho_m \; , \; R_{\frac{1}{m}} = Ad_{\frac{1}{m}}$$

$$R = \frac{S}{s^{(m)}_{\overline{n}|i}} = A\sigma^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{A\,j_m}{r^n-1} \; , \; R_{\frac{1}{m}} = \frac{Ai_{\frac{1}{m}}}{r^n-1}$$

$$R = \frac{S}{\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i}} = S\,\ddot{\sigma}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{S\,\rho_m}{r^n-1} \; , \; R_{\frac{1}{m}} = \frac{S\,d_{\frac{1}{m}}}{r^n-1}$$

Nota:

$$\alpha^{(m)}_{\overline{n}|i} - \sigma^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{j_m}{1-v^n} - \frac{j_m}{r^n-1} = j_m\left(\frac{r^n}{r^n-1} - \frac{1}{r^n-1}\right) = j_m$$

$$\ddot{\alpha}^{(m)}_{\overline{n}|i} - \ddot{\sigma}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{\rho_m}{1-v^n} - \frac{\rho_m}{r^n-1} = \rho_m\left(\frac{r^n}{r^n-1} - \frac{1}{r^n-1}\right) = \rho_m$$

$$\alpha^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sigma^{(m)}_{\overline{n}|i} + j_m \qquad \sigma^{(m)}_{\overline{n}|i} = \alpha^{(m)}_{\overline{n}|i} - j_m \qquad \ddot{\alpha}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \ddot{\sigma}^{(m)}_{\overline{n}|i} + \rho_m \qquad \ddot{\sigma}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \ddot{\alpha}^{(m)}_{\overline{n}|i} - \rho_m$$

- ***Ricerca della durata di una rendita costante frazionata***

$$\frac{A}{R}_a = a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1-v^n}{j_m} \Rightarrow v^n = 1 - a\,j_m \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\,j_m}_{a<\frac{1}{j_m}=a_{\overline{\infty}|i}^{(m)}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\,j_m)}{lg(1+i)}$$

$$\frac{A}{R}_a = \ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1-v^n}{\rho_m} \Rightarrow v^n = 1 - a\,\rho_m \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\,\rho_m}_{a<\frac{1}{\rho_m}=\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}^{(m)}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\rho_m)}{lg(1+i)}$$

$$\frac{S}{R}_s = s_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{r^n-1}{j_m} \Rightarrow r^n = 1 + s\,j_m \Rightarrow n = \frac{lg(1+s\,j_m)}{lg(1+i)}$$

$$\frac{S}{R}_s = \ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)} \Rightarrow \frac{r^n-1}{\rho_m} = 1 + s\rho_m \Rightarrow n = \frac{lg(1+s\rho_m)}{lg(1+i)}$$

- ***Ricerca del tasso d'interesse di una rendita costante frazionata***

$$a = a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1-v^n}{j_m} = \frac{r^n-1}{j_m\,r^n} \Rightarrow a\,r^n\,m(r^{\frac{1}{m}}-1) = r^n - 1$$
$$\Rightarrow a\,m\,r^{n+\frac{1}{m}} - a\,m\,r^n - r^n + 1 = 0 \Rightarrow a\,m\,r^{n+\frac{1}{m}} - (a\,m+1)r^n + 1 = 0$$

è un'equazione di grado frazionario nell'incognita r, la quale presenta la soluzione r = 1, ossia i = 0, ed eventuali altre soluzioni calcolabili con metodi di tipo numerico. Analoghe risultano le equazioni per i montanti ed i valori attuali di rendite anticipate.

- ***Ricerca del valore attuale e del montante di una rendita costante continua***

$$\boxed{A = R\,\bar{a}_{\overline{n}|i} = R\frac{1-v^n}{\delta}} \quad \boxed{A = R\,\bar{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{\delta}} \quad \boxed{S = R\,\bar{s}_{\overline{n}|i} = R\frac{r^n-1}{\delta}}$$

- ***Ricerca della rata di una rendita costante continua***

$$\boxed{R = \frac{A}{\bar{a}_{\overline{n}|i}} = A\bar{\alpha}_{\overline{n}|i} = \frac{A\delta}{1-v^n}} \quad \boxed{R = \frac{A}{\bar{a}_{\overline{\infty}|i}} = A\bar{\alpha}_{\overline{\infty}|i} = A\delta}$$

$$\boxed{R = \frac{S}{\bar{s}_{\overline{n}|i}} = A\bar{\sigma}_{\overline{n}|i} = \frac{A\delta}{r^n-1}}$$

Nota:

$$\boxed{\bar{\alpha}_{\overline{n}|i} - \bar{\sigma}_{\overline{n}|i} = \frac{\delta}{1-v^n} - \frac{\delta}{r^n-1} = \delta\left(\frac{r^n}{r^n-1} - \frac{1}{r^n-1}\right) = \delta}$$

$$\boxed{\bar{\alpha}_{\overline{n}|i} = \bar{\sigma}_{\overline{n}|i} + \delta} \quad \boxed{\bar{\sigma}_{\overline{n}|i} = \bar{\alpha}_{\overline{n}|i} - \delta}$$

- ***Ricerca della durata di una rendita***

$$\boxed{\underbrace{\frac{A}{R}}_{a} = \bar{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{\delta} \Rightarrow v^n = 1 - a\delta \Rightarrow r^n = \frac{1}{\underbrace{1-a\delta}_{a<\frac{1}{\delta}=\bar{a}_{\overline{\infty}|i}}} \Rightarrow n = -\frac{lg(1-a\delta)}{\delta}}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{S}{R}}_{s} = \bar{s}_{\overline{n}|i} = \frac{r^n-1}{\delta} \Rightarrow r^n = 1 + s\delta \Rightarrow n = \frac{lg(1+s\delta)}{\delta}}$$

- ***Ricerca del tasso d'interesse/sconto***

$$\boxed{a = \bar{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{r^n-1}{\delta r^n} \Rightarrow a\,r^n\,lg\,r = r^n - 1 \Rightarrow (a\,lg\,r - 1)r^n + 1 = 0}$$

è un'equazione trascendente nell'incognita r, la quale presenta la soluzione r = 1, ossia i = 0, ed eventuali altre soluzioni calcolabili con metodi di tipo numerico. Analoghe risultano le equazioni per i montanti ed i valori attuali di rendite anticipate.

- ***Ricerca del valore attuale e del montante di una rendita in progressione aritmetica intera (R,p(=Rg))***

$$\boxed{A = R\,(Ia)^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1-g)(1-v^n)+g(\ddot{a}_{\overline{n}|i}-nv^n)}{i}}$$

$$\boxed{A = R\,(I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1-g)(1-v^n)+g(\ddot{a}_{\overline{n}|i}-nv^n)}{d}}$$

$$\boxed{A = R\,(Ia)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R\,(i+g)}{i^2}} \qquad \boxed{A = R\,(I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R\,(i+g)}{i\,d}}$$

$$\boxed{S = R\,(Is)^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1-g)(r^n-1)+g(\ddot{s}_{\overline{n}|i}-n)}{i}}$$

$$\boxed{S = R\,(I\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,\frac{(1-g)(r^n-1)+g(\ddot{s}_{\overline{n}|i}-n)}{d}}$$

e in particolare

$$\boxed{A = R\,(Ia)_{\overline{n}|i} = R\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i}-nv^n}{i}} \qquad \boxed{A = R\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|i} = R\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i}-nv^n}{d}}$$

$$\boxed{A = R\,(Ia)_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{i\,d}} \qquad \boxed{A = R\,(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{d^2}}$$

$$S = R(Is)_{\overline{n|}i} = R\frac{\ddot{s}_{\overline{n|}i} - n}{i} \qquad S = R(I\ddot{s})_{\overline{n|}i} = R\frac{\ddot{s}_{\overline{n|}i} - n}{d}$$

$$A = R(Ia)^{(-i)}_{\overline{n|}i} = Rnv^{n} \qquad A = R(I\ddot{a})^{(-i)}_{\overline{n|}i} = Rnv^{n-1}$$

$$A = R(Ia)^{(-i)}_{\overline{\infty|}i} = R(I\ddot{a})^{(-i)}_{\overline{\infty|}i} = 0$$

$$S = R(Is)^{(-i)}_{\overline{n|}i} = Rn \qquad S = R(I\ddot{s})^{(-i)}_{\overline{n|}i} = Rnr$$

- ***Ricerca delle rate di una rendita in progressione aritmetica intera (R,p(=Rg))***

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\square}} R_k = \frac{A(1+g(k-1))}{(Ia)^{(g)}_{\overline{n|}i}} = A(1+g(k-1))(I\alpha)^{(g)}_{\overline{n|}i} = \frac{A(1+g(k-1))\,i}{(1-g)(1-v^{n}) + g(\ddot{a}_{\overline{n|}i} - nv^{n})}$$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\square}} R_k = \frac{A(1+g(k-1))}{(I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n|}i}} = A(1+g(k-1))(I\ddot{\alpha})^{(g)}_{\overline{n|}i} = \frac{A(1+g(k-1))\,d}{(1-g)(1-v^{n}) + g(\ddot{a}_{\overline{n|}i} - nv^{n})}$$

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\square}} R_k = \frac{A(1+g(k-1))}{(Ia)^{(g)}_{\overline{\infty|}i}} = A(1+g(k-1))(I\alpha)^{(g)}_{\overline{\infty|}i} = \frac{A(1+g(k-1))\,i^{2}}{i+g}$$

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\square}} R_k = \frac{A(1+g(k-1))}{(I\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty|}i}} = A(1+g(k-1))(I\ddot{\alpha})^{(g)}_{\overline{\infty|}i} = \frac{A(1+g(k-1))\,i\,d}{i+g}$$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\square}} R_k = \frac{S(1+g(k-1))}{(Is)^{(g)}_{\overline{n|}i}} = S(1+g(k-1))(I\sigma)^{(g)}_{\overline{n|}i} = \frac{S(1+g(k-1))\,i}{(1-g)(r^{n}-1) + g(\ddot{s}_{\overline{n|}i} - n)}$$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\square}} R_k = \frac{S(1+g(k-1))}{(I\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n|}i}} = S(1+g(k-1))(I\ddot{\sigma})^{(g)}_{\overline{n|}i} = \frac{S(1+g(k-1))\,d}{(1-g)(r^{n}-1) + g(\ddot{s}_{\overline{n|}i} - n)}$$

e in particolare

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{Ak}{(Ia)_{\overline{n}|i}} = Ak(I\alpha)_{\overline{n}|i} = \frac{Ak\,i}{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^{n}} \qquad \sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{Ak}{(I\ddot{a})_{\overline{n}|i}} = Ak(I\ddot{\alpha})_{\overline{n}|i} = \frac{Ak\,d}{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^{n}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k = \frac{Ak}{(Ia)_{\overline{\infty}|i}} = Ak(I\alpha)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \frac{Ak\,i^{2}}{i+g} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} R_k = \frac{Ak}{(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|i}} = Ak(I\ddot{\alpha})_{\overline{\infty}|i} = \frac{Ak\,i\,d}{i+g}$$

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{S\,k}{(Is)_{\overline{n}|i}} = S\,k(I\sigma)_{\overline{n}|i} = \frac{S\,k\,i}{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n} \qquad \sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{S\,k}{(I\ddot{s})_{\overline{n}|i}} = S\,k(I\ddot{\sigma})_{\overline{n}|i} = \frac{S\,k\,d}{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{Ak}{(Ia)^{(-i)}_{\overline{n}|i}} = Ak(I\alpha)^{(-i)}_{\overline{n}|i} = \frac{Ak}{nv^{n}} \qquad \sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{Ak}{(I\ddot{a})^{(-i)}_{\overline{n}|i}} = Ak(I\ddot{\alpha})^{(-i)}_{\overline{n}|i} = \frac{Ak}{nv^{n-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{S\,k}{(Is)^{(-i)}_{\overline{n}|i}} = S\,k(I\sigma)^{(-i)}_{\overline{n}|i} = \frac{S\,k}{n} \qquad \sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{S\,k}{(I\ddot{s})^{(-i)}_{\overline{n}|i}} = S\,k(I\ddot{\sigma})^{(-i)}_{\overline{n}|i} = \frac{S\,k}{nr}$$

- ***Ricerca della durata di una rendita in progressione aritmetica intera (R,p(=Rg)) >>> <u>risolvere con metodi numerici</u>***

- ***Ricerca del tasso d'interesse di una rendita in progressione aritmetica intera (R,p(=Rg)) >>> <u>risolvere con metodi numerici</u>***

- ***Ricerca del valore attuale e del montante di una rendita in progressione geometrica intera (R,1+g)***

$$A = R(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{R(Ga)^{(i)}_{\overline{n}|i} = \dfrac{R\,n}{1+i}}_{i=g} \\ \underbrace{R(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \dfrac{R}{1+g}\,a_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i\neq g} \end{cases}$$

$$A = R(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{R(G\ddot{a})^{(i)}_{\overline{n}|i} = R\,n}_{i=g} \\ \underbrace{R(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,\ddot{a}_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i\neq g} \end{cases}$$

$$A = R\,(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \begin{cases} \underbrace{R\,(Ga)^{(i)}_{\overline{\infty}|i} \to +\infty}_{i \le g} \\ \underbrace{R\,(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \dfrac{R}{i-g}}_{i > g} \end{cases}$$

$$A = R\,(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \begin{cases} \underbrace{R\,(G\ddot{a})^{(i)}_{\overline{\infty}|i} \to +\infty}_{i \le g} \\ \underbrace{R\,(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \dfrac{R\,(1+i)}{i-g}}_{i > g} \end{cases}$$

$$S = R\,(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{R\,(Gs)^{(i)}_{\overline{n}|i} = R\,(1+i)^{n-1}\, n}_{i = g} \\ \underbrace{R\,(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,(1+g)^{n-1}\, s_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i \ne g} \end{cases}$$

$$S = R\,(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{R\,(G\ddot{s})^{(i)}_{\overline{n}|i} = R\,(1+i)^{n}\, n}_{i = g} \\ \underbrace{R\,(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i} = R\,(1+g)^{n}\, \ddot{s}_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}_{i \ne g} \end{cases}$$

- ***Ricerca delle rate di una rendita in progressione geometrica intera (R,1+g)***

$$\mathop{\Box}_{k=1}^{n} R_k = \frac{A(1+g)^{k-1}}{(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i}} = A(1+g)^{k-1}\,(G\alpha)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{A(1+i)^{k-1}}{(Ga)^{(i)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+i)^{k}}{n}}_{i = g} \\ \underbrace{\dfrac{A(1+g)^{k-1}}{(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+g)^{k}}{a_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}}_{i \ne g} \end{cases}$$

$$\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{n} R_k = \frac{A(1+g)^{k-1}}{(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|i}} = A(1+g)^{k-1}\,(G\ddot{\alpha})^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{A(1+i)^{k}}{(G\ddot{a})^{(i)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+i)^{k-1}}{n}}_{i=g} \\ \underbrace{\dfrac{A(1+g)^{k-1}}{(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+g)^{k-1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}}_{i\neq g} \end{cases}$$

$$\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{\infty} R_k = \frac{A(1+g)^{k-1}}{(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i}} = A(1+g)^{k-1}\,(G\alpha)^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \underbrace{A(1+g)^{k-1}\,(i-g)}_{i>g}$$

$$\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{\infty} R_k = \frac{A(1+g)^{k-1}}{(G\ddot{a})^{(g)}_{\overline{\infty}|i}} = A(1+g)^{k-1}\,(G\ddot{\alpha})^{(g)}_{\overline{\infty}|i} = \underbrace{A(1+g)^{k-1}\,\frac{i-g}{1+i}}_{i>g}$$

$$\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{n} R_k = \frac{S\,(1+g)^{k-1}}{(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i}} = S\,(1+g)^{k-1}\,(G\sigma)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{S\,(1+i)^{k-1}}{(Gs)^{(i)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+i)^{-(n-k)}}{n}}_{i=g} \\ \underbrace{\dfrac{A(1+g)^{k-1}}{(Gs)^{(g)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+g)^{-(n-k)}}{s_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}}_{i\neq g} \end{cases}$$

$$\mathop{\Box}\limits_{k=1}^{n} R_k = \frac{S\,(1+g)^{k-1}}{(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i}} = S\,(1+g)^{k-1}\,(G\ddot{\sigma})^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{S\,(1+i)^{k-1}}{(G\ddot{s})^{(i)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+i)^{-(n-k+1)}}{n}}_{i=g} \\ \underbrace{\dfrac{A(1+g)^{k-1}}{(G\ddot{s})^{(g)}_{\overline{n}|i}} = \dfrac{A(1+g)^{-(n-k+1)}}{\ddot{s}_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}}_{i\neq g} \end{cases}$$

- ***Ricerca della durata di una rendita in progressione geometrica intera (R,1+g)***

$$\underset{a}{\frac{A}{R}} = (Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \underbrace{(Ga)^{(i)}_{\overline{n}|i} = \dfrac{n}{1+i}}_{i=g} \Rightarrow n = a(1+i) \\ \underbrace{(Ga)^{(g)}_{\overline{n}|i} = \dfrac{a_{\overline{n}|\frac{i-g}{1+g}}}{1+g} = \dfrac{1-\left(1+\dfrac{i-g}{1+g}\right)^{-n}}{i-g}}_{i\neq g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1+\dfrac{i-g}{1+g}\right)^{n} = \dfrac{1}{\underbrace{1-a(i-g)}_{a<\frac{1}{i-g}=(Ga)^{(g)}_{\overline{\infty}|i}}} \Rightarrow n = -\dfrac{lg(1-a(i-g))}{lg(1+i)-lg(1+g)} \end{cases}$$

Analoghe relazioni risultano nel caso di montanti e di valori attuali di rendite anticipate.

- ***Ricerca del tasso d'interesse di una rendita in progressione geometrica intera (R,1+g) >>> <u>risolvere con metodi numerici</u>***

Esercizio 2.12 (1) - Rimborso di un prestito >>>

Esercizio 2.12 (2) - Ricerca della rata >>>

Esercizio 2.12 (3) - Calcolo di una pensione >>>

Esercizio 2.12 (4) - Investimento in beni culturali >>>

Appendice

Formula generale per il calcolo del valore attuale di una rendita

$$
{}_{t/}a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} \alpha \dfrac{1-\beta}{\gamma}(1+\lambda) = \\ (1+i)^{-t} \dfrac{1+(1+i)^{-n}}{j_m}\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^w \end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\alpha = \begin{cases} 1 & \text{immediata} \\ (1+i)^{-t} & \text{differita} \end{cases} \\
\beta = \begin{cases} (1+i)^{-n} & \text{temporanea} \\ 0 & \text{perpetua} \end{cases} \\
\gamma = \begin{cases} i & \text{intera} \\ j_m & \text{frazionata} \\ \delta & \text{perpetua} \end{cases} \\
\lambda = \begin{cases} 0 & \text{posticipata} \quad (w=0) \\ i & \text{anticip intera} \ (w=1) \\ \dfrac{j_m}{m} & \text{anticip fraz} \quad (w=1) \end{cases}
\end{cases}
$$

	A	B	C	D	E
53	Tasso i	i	5%	j_m	4.9089%
54	Immed = 0 , Diff = t	t	6	$(1+i)^{-t}$	0.74622
55	Postic= 0 , Antic = 1	w	1	$(1+(j_m/m))^w$	1.01227
56	Temp = n , Perp = 999999	n	20	$1-(1+i)^{-n}$	0.62311
57	Intera = 1 , Fraz = m , Cont = 999999	m	4		
58	Valore attuale		9.5883		

	B	C	D	E
53	i	0.05	j_m	=C57*((1+C53)^(1/C57)-1)
54	t	6	$(1+i)^{-t}$	=(1+C53)^-C54
55	w	1	$(1+(j_m/m))^w$	=(1+E53/C57)^C55
56	n	20	$1-(1+i)^{-n}$	=1-(1+C53)^-C56
57	m	4		
58		=E54*E56/E53*E55		

Esercizi svolti in Excel Microsoft

Esercizio 2.2 (1) - Valore capitale di una rendita >>>

	A	B	C	D	E
1	i	10.00%	t_k	R_k	A_T
2	r	1.1000	1.00	500	605.00
3	T	3	2.50	100	104.88
4			3.75	300	279.30
5			5.50	200	157.60
6			7.00	400	273.21
7					1419.99

	A	B	C	D	E
1	i	0.1	t_k	R_k	A_T
2	r	=1+B1	1	500	=D2*B$2^(B$3-C2)
3	T	3	2.5	100	=D3*B$2^(B$3-C3)
4			3.75	300	=D4*B$2^(B$3-C4)
5			5.5	200	=D5*B$2^(B$3-C5)
6			7	400	=D6*B$2^(B$3-C6)
7					=SOMMA(E2:E6)

Esercizio 2.3 (1) - Valori attuali e montanti >>>

Calcolare valori attuale e montanti di una rendita unintervallata variabile intera temporanea

	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	10.00%	k	R_k	V_0	W_n	${}_aV_0$	${}_aW_n$	${}_{t/}V_0$	${}_{t/a}V_n$
2	1.1000	1	500	454.55	732.05	500.00	805.26	341.51	375.66
3	5	2	100	82.64	133.10	90.91	146.41	62.09	68.30
4	3	3	300	225.39	363.00	247.93	399.30	169.34	186.28
5		4	200	136.60	220.00	150.26	242.00	102.63	112.89
6		5	400	248.37	400.00	273.21	440.00	186.60	205.26
7				1147.56	1848.15	1262.31	2032.97	862.18	948.39

	H	I	J	K	L	M
1	0.1	k	R_k	V_0	W_n	${}_aV_0$
2	=1+H1	1	500	=J2*H$2^-I2	=J2*H$2^(H$3-I2)	=J2*H$2^-(I2-1)
3	5	=I2+1	100	=J3*H$2^-I3	=J3*H$2^(H$3-I3)	=J3*H$2^-(I3-1)
4	3	=I3+1	300	=J4*H$2^-I4	=J4*H$2^(H$3-I4)	=J4*H$2^-(I4-1)
5		=I4+1	200	=J5*H$2^-I5	=J5*H$2^(H$3-I5)	=J5*H$2^-(I5-1)
6		=I5+1	400	=J6*H$2^-I6	=J6*H$2^(H$3-I6)	=J6*H$2^-(I6-1)
7				=SOMMA(K2:K6)	=SOMMA(L2:L6)	=SOMMA(M2:M6)

	N	O	P
1	$_{a}W_{n}$	$_{t/}V_{0}$	$_{t/a}V_{n}$
2	=J2*H$2^(H$3-(I2-1))	=J2*H$2^-(I2+H$4)	=J2*H$2^-(I2+H$4-1)
3	=J3*H$2^(H$3-(I3-1))	=J3*H$2^-(I3+H$4)	=J3*H$2^-(I3+H$4-1)
4	=J4*H$2^(H$3-(I4-1))	=J4*H$2^-(I4+H$4)	=J4*H$2^-(I4+H$4-1)
5	=J5*H$2^(H$3-(I5-1))	=J5*H$2^-(I5+H$4)	=J5*H$2^-(I5+H$4-1)
6	=J6*H$2^(H$3-(I6-1))	=J6*H$2^-(I6+H$4)	=J6*H$2^-(I6+H$4-1)
7	=SOMMA(N2:N6)	=SOMMA(O2:O6)	=SOMMA(P2:P6)

Esercizio 2.3 (2) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Calcolare valori attuale e montanti di una rendita unintervallata variabile in progressione aritmetica intera temporanea

	G	H	I	J	K	L	M	N
9	i	10.00%	k	R_k	V_0	W_n	$_{a}V_{0}$	$_{a}W_{n}$
10	r	1.1000	1	500	454.55	732.05	500.00	805.26
11	n	5	2	600	495.87	798.60	545.45	878.46
12	R	500	3	700	525.92	847.00	578.51	931.70
13	p	100	4	800	546.41	880.00	601.05	968.00
14			5	900	558.83	900.00	614.71	990.00
15					2581.57	4157.65	2839.73	4573.42

	G	H	I	J	K
9	i	0.1	k	R_k	V_0
10	r	=1+H9	1	=H12	=J10*H$2^-I10
11	n	5	=I10+1	=J10+H$13	=J11*H$2^-I11
12	R	500	=I11+1	=J11+H$13	=J12*H$2^-I12
13	p	100	=I12+1	=J12+H$13	=J13*H$2^-I13
14			=I13+1	=J13+H$13	=J14*H$2^-I14
15					=SOMMA(K10:K14)

	L	M	N
9	W_n	${}_aV_0$	${}_aW_n$
10	=J10*H$2^(H$3-I10)	=J10*H$2^-(I10-1)	=J10*H$2^(H$3-(I10-1))
11	=J11*H$2^(H$3-I11)	=J11*H$2^-(I11-1)	=J11*H$2^(H$3-(I11-1))
12	=J12*H$2^(H$3-I12)	=J12*H$2^-(I12-1)	=J12*H$2^(H$3-(I12-1))
13	=J13*H$2^(H$3-I13)	=J13*H$2^-(I13-1)	=J13*H$2^(H$3-(I13-1))
14	=J14*H$2^(H$3-I14)	=J14*H$2^-(I14-1)	=J14*H$2^(H$3-(I14-1))
15	=SOMMA(L10:L14)	=SOMMA(M10:M14)	=SOMMA(N10:N14)

Esercizio 2.3 (3) - Rendite in progressione geometrica >>>

Calcolare valori attuale e montanti di una rendita unintervallata variabile in progressione geometrica intera temporanea

	G	H	I	J	K	L	M	N
17	*i*	10.00%	*k*	R_k	V_0	W_n	${}_aV_0$	${}_aW_n$
18	*r*	1.1000	1	500	454.55	732.05	500.00	805.26
19	*n*	5	2	600	495.87	798.60	545.45	878.46
20	*R*	500	3	720	540.95	871.20	595.04	958.32
21	*q*	1.2	4	864	590.12	950.40	649.14	1045.44
22			5	1037	643.77	1036.80	708.15	1140.48
23					2725.25	4389.05	2997.78	4827.96

	G	H	I	J	K
17	*i*	0.1	*k*	R_k	V_0
18	*r*	=1+H17	1	=H20	=J18*H$2^-I18
19	*n*	5	=I18+1	=J18*H$21	=J19*H$2^-I19
20	*R*	500	=I19+1	=J19*H$21	=J20*H$2^-I20
21	*q*	1.2	=I20+1	=J20*H$21	=J21*H$2^-I21
22			=I21+1	=J21*H$21	=J22*H$2^-I22
23					=SOMMA(K18:K22)

	L	M	N
17	W_n	${}_aV_0$	${}_aW_n$
18	=J18*H$2^(H$3-I18)	=J18*H$2^-(I18-1)	=J18*H$2^(H$3-(I18-1))
19	=J19*H$2^(H$3-I19)	=J19*H$2^-(I19-1)	=J19*H$2^(H$3-(I19-1))
20	=J20*H$2^(H$3-I20)	=J20*H$2^-(I20-1)	=J20*H$2^(H$3-(I20-1))
21	=J21*H$2^(H$3-I21)	=J21*H$2^-(I21-1)	=J21*H$2^(H$3-(I21-1))
22	=J22*H$2^(H$3-I22)	=J22*H$2^-(I22-1)	=J22*H$2^(H$3-(I22-1))
23	=SOMMA(L18:L22)	=SOMMA(M18:M22)	=SOMMA(N18:N22)

Esercizio 2.4 (1) - Rendite: valori attuali e montanti >>>

Tabulare i valori attuali (immediati e differiti) e i montanti di rendite (posticipate ed anticipate) al tasso effettivo i e per le diverse durate da 1 ad 20 periodi unitari

$$\square_{n=1}^{20} a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} \qquad \square_{n=1}^{20} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{d}$$

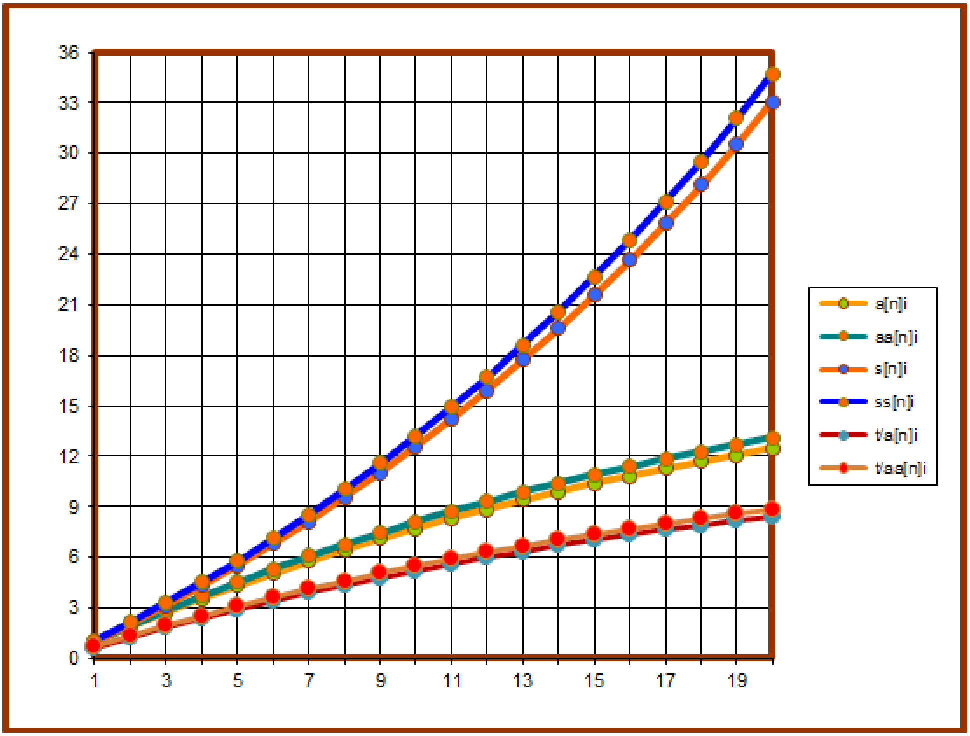
$$\square_{n=1}^{20} s_{\overline{n}|i} = \frac{r^n-1}{i} \qquad \square_{n=1}^{20} \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{r^n-1}{d}$$

$$\square_{n=1}^{20} {}_{t/}a_{\overline{n}|i} = v^t \cdot \frac{1-v^n}{i} \qquad \square_{n=1}^{20} {}_{t/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^t \cdot \frac{1-v^n}{d}$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	tax	5%				Differ	8
2	n	a[n]i	aa[n]i	s[n]i	as[n]i	t/a[n]i	t/aa[n]i
3	1	0.95238	1.00000	1.00000	1.05000	0.64461	0.67684
4	2	1.85941	1.95238	2.05000	2.15250	1.25852	1.32145
5	3	2.72325	2.85941	3.15250	3.31013	1.84320	1.93536
6	4	3.54595	3.72325	4.31013	4.52563	2.40004	2.52004
7	5	4.32948	4.54595	5.52563	5.80191	2.93036	3.07688
8	6	5.07569	5.32948	6.80191	7.14201	3.43543	3.60720
9	7	5.78637	6.07569	8.14201	8.54911	3.91645	4.11227
10	8	6.46321	6.78637	9.54911	10.02656	4.37456	4.59328
11	9	7.10782	7.46321	11.02656	11.57789	4.81085	5.05140
12	10	7.72173	8.10782	12.57789	13.20679	5.22637	5.48769
13	11	8.30641	8.72173	14.20679	14.91713	5.62211	5.90321
14	12	8.86325	9.30641	15.91713	16.71298	5.99900	6.29895
15	13	9.39357	9.86325	17.71298	18.59863	6.35794	6.67584
16	14	9.89864	10.39357	19.59863	20.57856	6.69979	7.03478
17	15	10.37966	10.89864	21.57856	22.65749	7.02536	7.37663
18	16	10.83777	11.37966	23.65749	24.84037	7.33543	7.70220
19	17	11.27407	11.83777	25.84037	27.13238	7.63073	8.01227
20	18	11.68959	12.27407	28.13238	29.53900	7.91197	8.30757
21	19	12.08532	12.68959	30.53900	32.06595	8.17982	8.58881
22	20	12.46221	13.08532	33.06595	34.71925	8.43491	8.85666
23	999	20.00000	21.00000			13.53679	14.21363

	A	B	C	D
1	tax	0.05		
2	n	a[n]i	aa[n]i	s[n]i
3	1	=(1-(1+B$1)^-A3)/B$1	=B3*(1+B$1)	=((1+B$1)^A3-1)/B$1
4	2	=(1-(1+B$1)^-A4)/B$1	=B4*(1+B$1)	=((1+B$1)^A4-1)/B$1
5	3	=(1-(1+B$1)^-A5)/B$1	=B5*(1+B$1)	=((1+B$1)^A5-1)/B$1

	E	F	G
1		Differ	8
2	as[n]i	t/a[n]i	t/aa[n]i
3	=D3*(1+B$1)	=B3*(1+B$1)^-G$1	=F3*(1+B$1)
4	=D4*(1+B$1)	=B4*(1+B$1)^-G$1	=F4*(1+B$1)
5	=D5*(1+B$1)	=B5*(1+B$1)^-G$1	=F5*(1+B$1)



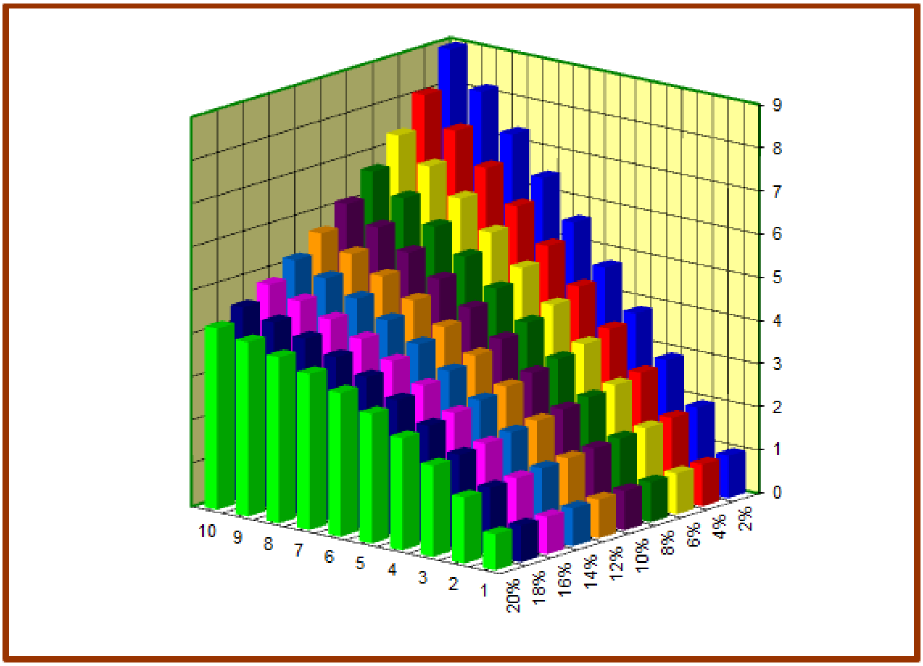
Esercizio 2.4 (2) - Rendite: valori attuali >>>

Tabulare i valori attuali di rendite posticipate per i diversi tassi effettivi da 2% a 20% (oppure da k% a 10k%) e per le diverse durate da 1 ad 10 (oppure da w a 10w) periodi unitari

$$\underset{n=1}{\overset{10}{\Box}}\ \underset{\substack{i=0.02\\(0.02)}}{\overset{0.20}{\Box}}\ a_{\overline{n|}i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
1	*Dur*	*Tassi*									
2	*n*	*2%*	*4%*	*6%*	*8%*	*10%*	*12%*	*14%*	*16%*	*18%*	*20%*
3	*1*	*0.980*	*0.962*	*0.943*	*0.926*	*0.909*	*0.893*	*0.877*	*0.862*	*0.847*	*0.833*
4	*2*	*1.942*	*1.886*	*1.833*	*1.783*	*1.736*	*1.690*	*1.647*	*1.605*	*1.566*	*1.528*
5	*3*	*2.884*	*2.775*	*2.673*	*2.577*	*2.487*	*2.402*	*2.322*	*2.246*	*2.174*	*2.106*
6	*4*	*3.808*	*3.630*	*3.465*	*3.312*	*3.170*	*3.037*	*2.914*	*2.798*	*2.690*	*2.589*
7	*5*	*4.713*	*4.452*	*4.212*	*3.993*	*3.791*	*3.605*	*3.433*	*3.274*	*3.127*	*2.991*
8	*6*	*5.601*	*5.242*	*4.917*	*4.623*	*4.355*	*4.111*	*3.889*	*3.685*	*3.498*	*3.326*
9	*7*	*6.472*	*6.002*	*5.582*	*5.206*	*4.868*	*4.564*	*4.288*	*4.039*	*3.812*	*3.605*
10	*8*	*7.325*	*6.733*	*6.210*	*5.747*	*5.335*	*4.968*	*4.639*	*4.344*	*4.078*	*3.837*
11	*9*	*8.162*	*7.435*	*6.802*	*6.247*	*5.759*	*5.328*	*4.946*	*4.607*	*4.303*	*4.031*
12	*10*	*8.983*	*8.111*	*7.360*	*6.710*	*6.145*	*5.650*	*5.216*	*4.833*	*4.494*	*4.192*

	W	X	Y	Z
1	*Dur*			
2	*n*	*0.02*	*=X2+$X2*	*=Y2+$X2*
3	*1*	*=(1-(1+X$2)^-$W3)/X$2*	*=(1-(1+Y$2)^-$W3)/Y$2*	*=(1-(1+Z$2)^-$W3)/Z$2*
4	*=W3+W$3*	*=(1-(1+X$2)^-$W4)/X$2*	*=(1-(1+Y$2)^-$W4)/Y$2*	*=(1-(1+Z$2)^-$W4)/Z$2*
5	*=W4+W$3*	*=(1-(1+X$2)^-$W5)/X$2*	*=(1-(1+Y$2)^-$W5)/Y$2*	*=(1-(1+Z$2)^-$W5)/Z$2*



Esercizio 2.4 (3) - Rendite: modifica delle condizioni >>>

Un soggetto doveva pagare un debito di ammontare C mediante n rate costanti posticipate al tasso effettivo i. Dopo pagata la s-sima rata, tale soggetto chiede di raddoppiare il residuo periodo di rimborso, ma il creditore nell'accettare la richiesta, impone il raddoppio del tasso d'interesse e l'anticipazione del pagamento delle rate. Calcolare:

- ***l'ammontare della rata originariamente pattuita,***
- ***l'ammontare della rata modificata.***

- ***Rata originaria***

$$R_1 = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}} = C\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- ***Debito residuo (dopo il pagamento della s-sima rata)***

$$D_s = R_1\, a_{\overline{n-s}|i} = C\frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}} = C\frac{1-(1+i)^{-(n-s)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

- ***Rata modificata***

$$R_2 = \frac{D_s}{\ddot{a}_{\overline{2(n-s)}|2i}} = C\frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}\,\ddot{a}_{\overline{2(n-s)}|2i}} = C\frac{(1-(1+i)^{-(n-s)})d}{(1-(1+i)^{-n})(1-(1+2i)^{-2(n-s)})}$$

	B	C	D	E
25	Debito	10000		
26	Durata	12		
27	Tempo	7	10	
28	Tasso	5.00%	10.00%	9.09%
29	Rata1	1128.25		
30	Residuo	4884.75		
31	Rata 2	722.70		

	B	C	D	E
25	Debito	10000		
26	Durata	12		
27	Tempo	7	=2*(C26-C27)	
28	Tasso	0.05	=C28*2	=D28/(1+D28)
29	Rata1	=C25*C28/(1-(1+C28)^-C26)		
30	Residuo	=C29*(1-(1+C28)^-(C26-C27))/C28		
31	Rata 2	=C30*E28/((1-(1+D28)^-D27))		

Esercizio 2.5 (1) - Rendite perpetue: valutazione >>>

Calcolare i valori attuali (posticipati ed anticipati) di rendite perpetue al tasso effettivo del 5%

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \quad , \quad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{i}$$

	A	B	C
33	tax	5%	
34	n	a[n]i	aa[n]i
35	∞	20.00000	21.00000

	A	B	C
33	tax	0.05	
34	n	a[n]i	aa[n]i
35	∞	=1/B33	=B35*(1+B$1)

Esercizio 2.5 (2) - Rendite perpetue: calcolo del tasso >>>

A fronte del pagamento di una rendita perpetua di rata pari a R, un soggetto ottiene di pagare n rate posticipate di importo pari a R_1. Calcolare il tasso effettivo al quale è stata effettuata l'operazione.

$$\left.\begin{aligned} D &= R\, a_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{i} \\ D &= R_1\, a_{\overline{n}|i} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{R}{i} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+i)^{-n} = 1 - \frac{R}{R_1} \Rightarrow (1+i)^{n} = \frac{R_1}{R_1 - R} \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{R_1}{R_1 - R}} - 1$$

	B	C
37	*Rata*	*160*
38	*Rata1*	*640*
39	*Durata*	*8*
40	*Tasso*	*3.6615%*
41	*Debito*	*4370*

	B	C
37	*Rata*	*160*
38	*Rata1*	*640*
39	*Durata*	*8*
40	*Tasso*	*=(C38/(C38-C37))^(1/C39)-1*
41	*Debito*	*=C37/C40*

Esercizio 2.6 (1) - Rendite frazionate: valutazione >>>

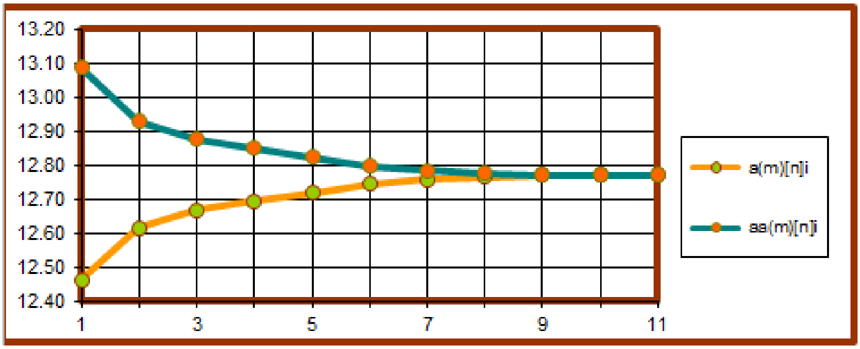
Tabulare i valori attuali e i montanti (posticipati ed anticipati) di una rendita di 20 annualità al tasso effettivo del 5% per diversi frazionamenti: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24, 52, 365, 8760, 525600

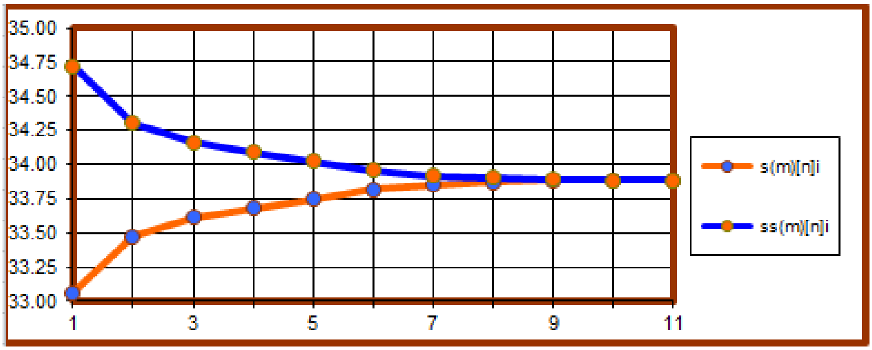
$$\square_{\substack{m=1,2,3,4,6,12,24 \\ 52,365,8760,525600}} \left(a^{(m)}_{\overline{n}|i}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i}, s^{(m)}_{\overline{n}|i}, \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i}\right)$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	20	d	a[n]i	aa[n]i	s[n]i	ss[n]i
2	i	5%	4.7619%	12.46221	13.08532	33.06595	34.71925
3	m	jm	ρ m	a(m)[n]i	aa(m)[n]i	s(m)[n]i	ss(m)[n]i
4	1	5.0000%	4.7619%	12.46221	13.08532	33.06595	34.71925
5	2	4.9390%	4.8200%	12.61609	12.92764	33.47424	34.30089
6	3	4.9189%	4.8396%	12.66766	12.87537	33.61108	34.16218
7	4	4.9089%	4.8494%	12.69350	12.84928	33.67964	34.09296
8	6	4.8989%	4.8592%	12.71938	12.82323	33.74829	34.02384
9	12	4.8889%	4.8691%	12.74529	12.79721	33.81704	33.95482
10	24	4.8840%	4.8741%	12.75826	12.78422	33.85145	33.92034
11	52	4.8813%	4.8767%	12.76524	12.77722	33.86999	33.90178
12	365	4.8793%	4.8787%	12.77038	12.77209	33.88362	33.88815
13	8760	4.8790%	4.8790%	12.77120	12.77127	33.88579	33.88598
14	525600	4.8790%	4.8790%	12.77123	12.77123	33.88588	33.88588

	A	B	C	D
1	n	20	d	a[n]i
2	i	0.05	=B2/(1+B2)	=(1-(1+B2)^-B1)/B2
3	m	jm	ρ m	a(m)[n]i
4	1	=A4*((1+B$2)^(1/A4)-1)	=B4/(1+B4/A4)	=$B$2/$B4*D$2
5	2	=A5*((1+B$2)^(1/A5)-1)	=B5/(1+B5/A5)	=$B$2/$B5*D$2
6	3	=A6*((1+B$2)^(1/A6)-1)	=B6/(1+B6/A6)	=$B$2/$B6*D$2

	E	F	G
1	aa[n]i	s[n]i	ss[n]i
2	=D2*(1+B2)	=((1+B2)^B1-1)/B2	=F2*(1+B2)
3	aa(m)[n]i	s(m)[n]i	ss(m)[n]i
4	=$C$2/$C4*E$2	=$B$2/$B4*F$2	=$C$2/$C4*G$2
5	=$C$2/$C5*E$2	=$B$2/$B5*F$2	=$C$2/$C5*G$2
6	=$C$2/$C6*E$2	=$B$2/$B6*F$2	=$C$2/$C6*G$2





Esercizio 2.6 (2) - Rendite frazionate: valutazione >>>

Calcolare il montante del versamento di 4m (es. 40) rate trimestrali di importo R (es. 1000, in capitalizzazione composta in base ad un tasso nominale con convertibilità quadrimestrale j_3

$$V = 4R\, s^{(4)}_{\overline{n}|i} = \begin{cases} 4R\dfrac{i}{j_4}s_{\overline{n}|i} = 4R\dfrac{\left(1+\dfrac{j_3}{3}\right)^3-1}{4\left(1+\dfrac{j_3}{3}\right)^{\frac{3}{4}}-1}\, s_{\overline{n}|\left(1+\frac{j_3}{3}\right)^3-1} \\ R\dfrac{i}{i_{\frac{1}{4}}}s_{\overline{n}|i} = R\dfrac{i}{i_{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i} = R\dfrac{(1+i_{\frac{1}{4}})^{4n}-1}{i_{\frac{1}{4}}} = R\, s_{\overline{4n}|i_{\frac{1}{4}}} \end{cases}$$

	I	J	K
1		1000	10
2	Tasso j3	5.0000%	3
3	Tasso i	5.0838%	
4	Tasso j4	4.9897%	4
5	Valore	51461.75	51461.75

	I	J	K
1		1000	10
2	Tasso j3	0.05	3
3	Tasso i	=(1+J2/K2)^K2-1	
4	Tasso j4	=K4*((1+J2/K2)^(K2/K4)-1)	4
5	Valore	=K4*J1*J3/J4*((1+J3)^K1-1)/J3	=J1*((1+J4/K4)^(K4*K1)-1)/(J4/K4)

Esercizio 2.6 (3) - Rendite frazionate: valutazione appross >>>

Ripetere l'esercizio precedente, considerando le formule approssimate per il calcolo dei tassi necessari all'effettuazione del calcolo.

$$V = 4R\, s^{(4)}_{\overline{n}|i} = 4R \frac{i}{j_4} s_{\overline{n}|i}$$

$$\left.\begin{array}{l} i \simeq j_3\left(1+\dfrac{3-1}{2\cdot 3} j_3\right) = j_3\left(1+\dfrac{j_3}{3}\right) \\ j_4 \simeq j_3\left(1+\dfrac{3-4}{2\cdot 3\cdot 4} j_3\right) = j_3\left(1-\dfrac{j_3}{24}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow V \simeq 4R \frac{1+\dfrac{j_3}{3}}{1-\dfrac{j_3}{24}} s_{\overline{n}|j_3\left(1+\frac{j_3}{3}\right)}$$

	I	J	K	L	M
1		1000	10		
2	Tasso j3	5.0000%	3		
3	Tasso i	5.0838%		0.3333	5.0833%
4	Tasso j4	4.9897%	4	-0.0417	4.9896%
5	Valore	51461.75	51461.75	Valore	51456.69

	I	L	M
1			
2	Tasso j3		
3	Tasso i	=(K2-1)/(2*K2)	=J2*(1+L3*J2)
4	Tasso j4	=(K2-K4)/(2*K2*K4)	=J2*(1+L4*J2)
5	Valore	Valore	=K4*J1*M3/M4*((1+M3)^K1-1)/M3

Esercizio 2.9 (1) - Rendite continue: valutazione >>>

Dato il tasso effettivo del 6%, calcolare il valore attuale di una rendita continua di rata annua di € 1000 per una durata di 10 anni. Ripetere l'esercizio nell'ipotesi che il 6% sia nominale istantaneo.

$$i = 0.06 \quad \Rightarrow \delta = lg(1+i)$$

$$A = R\,\bar{a}_{\overline{n}|i} = R\frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|i} = R\frac{i}{ln(1+i)} a_{\overline{n}|i} \simeq \frac{R\,i}{i\left(1-\dfrac{i}{2}\right)} a_{\overline{n}|i} \simeq R\left(1+\frac{i}{2}\right) a_{\overline{n}|i}$$

$$\delta = 0.06 \quad \Rightarrow i = e^{\delta} - 1$$

$$A = R\,\bar{a}_{\overline{n}|i} = R\frac{i}{\delta}a_{\overline{n}|i} = R\frac{\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}a_{\overline{n}|i} \simeq R\left(1+\frac{\delta}{2}\right)a_{\overline{n}|i}$$

	O	P	Q
1	Rata	1000	
2	Durata	10	
3	Tasso i	6.0000%	6.1837%
4	Tasso δ	5.8269%	6.0000%
5	a[n]i	7.3601	7.2965
6	Valore	7578.75	7519.81
7	Val apprx	7580.89	7515.36

	O	P	Q
1	Rata	1000	
2	Durata	10	
3	Tasso i	0.06	=EXP(Q4)-1
4	Tasso δ	=LN(1+P3)	0.06
5	a[n]i	=(1-(1+P3)^-$P2)/P3	=(1-(1+Q3)^-$P2)/Q3
6	Valore	=$P1*P3/P4*P5	=$P1*Q3/Q4*Q5
7	Val apprx	=$P1*(1+P3/2)*P5	=$P1*(1+Q4/2)*Q5

Esercizio 2.10 (1) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Tabulare i valori attuali e i montanti di rendite (posticipate ed anticipate) in progressione aritmetica di ragione g = 10% al tasso effettivo del 5% e per le diverse durate da 1 ad 20 periodi unitari

	I	J	K	L	M	N	O
1	tax	5%	g	10%			
2	n	a[n]i	s[n]i	ia[n]i	aia[n]i	is[n]i	ais[n]i
3	1	0.95238	1.00000	0.95238	1.00000	1.00000	1.05000
4	2	1.85941	2.05000	1.95011	2.04762	2.15000	2.25750
5	3	2.72325	3.15250	2.98672	3.13605	3.45750	3.63038
6	4	3.54595	4.31013	4.05623	4.25904	4.93038	5.17689
7	5	4.32948	5.52563	5.15317	5.41083	6.57689	6.90574
8	6	5.07569	6.80191	6.27249	6.58612	8.40574	8.82603
9	7	5.78637	8.14201	7.40958	7.78006	10.42603	10.94733
10	8	6.46321	9.54911	8.56021	8.98822	12.64733	13.27969
11	9	7.10782	11.02656	9.72050	10.20653	15.07969	15.83368
12	10	7.72173	12.57789	10.88694	11.43129	17.73368	18.62036
13	11	8.30641	14.20679	12.05630	12.65911	20.62036	21.65138
14	12	8.86325	15.91713	13.22566	13.88694	23.75138	24.93895
15	13	9.39357	17.71298	14.39236	15.11198	27.13895	28.49590
16	14	9.89864	19.59863	15.55402	16.33172	30.79590	32.33569
17	15	10.37966	21.57856	16.70846	17.54388	34.73569	36.47248
18	16	10.83777	23.65749	17.85374	18.74643	38.97248	40.92110
19	17	11.27407	25.84037	18.98811	19.93752	43.52110	45.69715
20	18	11.68959	28.13238	20.11002	21.11552	48.39715	50.81701
21	19	12.08532	30.53900	21.21807	22.27898	53.61701	56.29786
22	20	12.46221	33.06595	22.31105	23.42660	59.19786	62.15776
23	999	20.00000		60.00000	63.00000		

	I	J	K
1	tax	0.05	g
2	n	a[n]i	s[n]i
3	1	=(1-(1+J$1)^-I3)/J$1	=((1+J$1)^I3-1)/J$1
4	2	=(1-(1+J$1)^-I4)/J$1	=((1+J$1)^I4-1)/J$1
5	3	=(1-(1+J$1)^-I5)/J$1	=((1+J$1)^I5-1)/J$1

	L	M
1	0.1	
2	ia[n]i	aia[n]i
3	=(1-L$1)*J3+L$1*((1+J$1)*J3-I3*(1+J$1)^-I3)/J$1	=L3*(1+J$1)
4	=(1-L$1)*J4+L$1*((1+J$1)*J4-I4*(1+J$1)^-I4)/J$1	=L4*(1+J$1)
5	=(1-L$1)*J5+L$1*((1+J$1)*J5-I5*(1+J$1)^-I5)/J$1	=L5*(1+J$1)

	N	O
1		
2	is[n]i	ais[n]i
3	=(1-L$1)*K3+L$1*((1+J$1)*K3-I3)/J$1	=N3*(1+J$1)
4	=(1-L$1)*K4+L$1*((1+J$1)*K4-I4)/J$1	=N4*(1+J$1)
5	=(1-L$1)*K5+L$1*((1+J$1)*K5-I5)/J$1	=N5*(1+J$1)

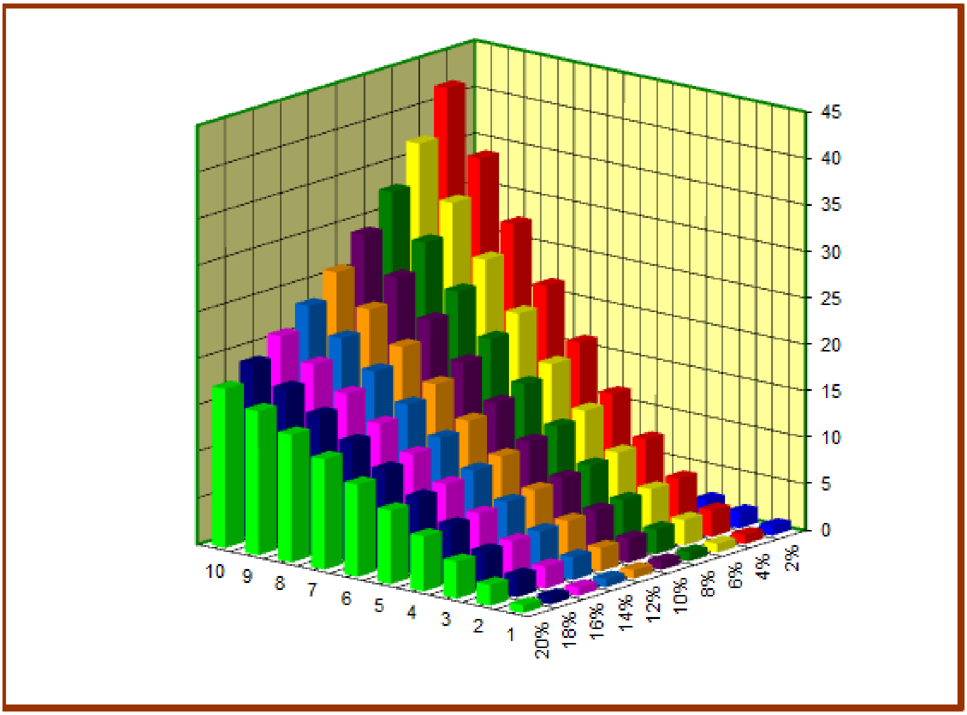
Esercizio 2.10 (2) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Tabulare i valori attuali di rendite posticipate in progressione aritmetica di ragione g = 100% per i diversi tassi effettivi da 2% a 20% (oppure da k% a 10k%) e per le diverse durate da 1 ad 10 (oppure da w a 10w) periodi unitari

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
16	Dur	Tassi									
17	n	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%	20%
18	1	0.980	0.962	0.943	0.926	0.909	0.893	0.877	0.862	0.847	0.833
19	2	2.903	2.811	2.723	2.641	2.562	2.487	2.416	2.348	2.284	2.222
20	3	5.730	5.478	5.242	5.022	4.816	4.623	4.441	4.270	4.110	3.958
21	4	9.425	8.897	8.411	7.962	7.548	7.165	6.809	6.480	6.173	5.887
22	5	13.954	13.006	12.147	11.365	10.653	10.002	9.406	8.860	8.358	7.897
23	6	19.282	17.748	16.377	15.146	14.039	13.042	12.140	11.323	10.581	9.906
24	7	25.375	23.068	21.032	19.231	17.632	16.208	14.937	13.800	12.778	11.860
25	8	32.203	28.913	26.051	23.553	21.364	19.439	17.742	16.240	14.907	13.720
26	9	39.734	35.237	31.378	28.055	25.180	22.685	20.509	18.606	16.936	15.464
27	10	47.938	41.992	36.962	32.687	29.036	25.904	23.207	20.873	18.847	17.080

	W	X
16	Dur	
17	n	0.02
18	1	=((1-(1+X$17)^-$W18)/(X$17/(1+X$17))-$W18*(1+X$17)^-$W18)/X$17
19	=W18+W$18	=((1-(1+X$17)^-$W19)/(X$17/(1+X$17))-$W19*(1+X$17)^-$W19)/X$17
20	=W19+W$18	=((1-(1+X$17)^-$W20)/(X$17/(1+X$17))-$W20*(1+X$17)^-$W20)/X$17

	Y
16	
17	=X17+$X17
18	=((1-(1+Y$17)^-$W18)/(Y$17/(1+Y$17))-$W18*(1+Y$17)^-$W18)/Y$17
19	=((1-(1+Y$17)^-$W19)/(Y$17/(1+Y$17))-$W19*(1+Y$17)^-$W19)/Y$17
20	=((1-(1+Y$17)^-$W20)/(Y$17/(1+Y$17))-$W20*(1+Y$17)^-$W20)/Y$17



Esercizio 2.10 (3) - Rendite in progressione aritmetica >>>

Calcolare il valore attuale di una rendita immediata anticipata con rate in progressione aritmetica di prima rata pari ad € 1000 e ragione pari a € 400, temporanea con durata pari a 13 anni (oppure perpetua) al tasso di interesse del 6% annuo.

$$d = \frac{0.06}{1.06} = 0.56604 \quad \Rightarrow \quad V_0 = 1000 \cdot (I\ddot{a})^{(0.4)}_{\overline{13}|0.06}$$
$$= 600\,\ddot{a}_{\overline{13}|0.06} + 400\,(I\ddot{a})_{\overline{13}|0.06} = 600\,\ddot{a}_{\overline{13}|0.06} + 400\,\frac{\ddot{a}_{\overline{13}|0.06} - 13 \cdot (1.06)^{-13}}{0.056604}$$

$$V_0 = 1000 \cdot (I\ddot{a})^{(0.4)}_{\overline{\infty}|0.06} = 600\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|0.06} + 400\,(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|0.06} = 1000\left(1 + \frac{1.4}{0.06} + \frac{0.4}{0.06^2}\right)$$

	B	C	D	E
43	Rata	1000		
44	Ragione	400	0.40	
45	Durata	13		
46	Tasso	6.00%	5.6604%	
47	n	Rate	Fattori	Valori
48	0	1000	1.000000	1000.00
49	1	1400	0.943396	1320.75
50	2	1800	0.889996	1601.99
51	3	2200	0.839619	1847.16
52	4	2600	0.792094	2059.44
53	5	3000	0.747258	2241.77
54	6	3400	0.704961	2396.87
55	7	3800	0.665057	2527.22
56	8	4200	0.627412	2635.13
57	9	4600	0.591898	2722.73
58	10	5000	0.558395	2791.97
59	11	5400	0.526788	2844.65
60	12	5800	0.496969	2882.42
61			Val Temp	28872.13
62			aa[n]i	9.3838
63			(Iaa)[n]i	58.1045
64			Val Temp	28872.13
65			Val Perp	135444.44

	B	C	D	E
43	Rata	1000		
44	Ragione	400	=C44/C43	
45	Durata	13		
46	Tasso	0.06	=C46/(1+C46)	
47	n	Rate	Fattori	Valori
48	0	=C43	=(1+C$46)^-B48	=C48*D48
49	1	=C48+C$44	=(1+C$46)^-B49	=C49*D49
50	2	=C49+C$44	=(1+C$46)^-B50	=C50*D50
59	11	=C58+C$44	=(1+C$46)^-B59	=C59*D59
60	12	=C59+C$44	=(1+C$46)^-B60	=C60*D60
61			Val Temp	=SOMMA(E48:E60)
62			aa[n]i	=(1-(1+C46)^-C45)/D46
63			(Iaa)[n]i	=(E62-C45*(1+C46)^-C45)/D46
64			Val Temp	=C43*((1-D44)*E62+D44*E63)
65			Val Perp	=C43*(1+(1+D44)/C46+D44/(C46^2))

Esercizio 2.11 (1) - Rendite in progressione geometrica >>>

Tabulare i valori attuali e i montanti di rendite (posticipate ed anticipate) in progressione geometrica di ragione g = 3% al tasso effettivo del 5% e per le diverse durate da 1 ad 20 periodi unitari

	Q	R	S	T	U
1	tax	5%	g	3%	1.94175%
2	n	ga[n]i	aga[n]i	gs[n]i	ags[n]i
3	1	0.95238	1.00000	1.00000	1.05000
4	2	1.88662	1.98095	2.08000	2.18400
5	3	2.80307	2.94322	3.24490	3.40714
6	4	3.70206	3.88716	4.49987	4.72487
7	5	4.58392	4.81312	5.85037	6.14289
8	6	5.44899	5.72144	7.30217	7.66728
9	7	6.29758	6.61246	8.86133	9.30439
10	8	7.13001	7.48651	10.53427	11.06098
11	9	7.94658	8.34391	12.32775	12.94414
12	10	8.74760	9.18498	14.24891	14.96136
13	11	9.53336	10.01002	16.30527	17.12054
14	12	10.30415	10.81936	18.50477	19.43001
15	13	11.06026	11.61327	20.85577	21.89856
16	14	11.80197	12.39207	23.36709	24.53545
17	15	12.52955	13.15603	26.04804	27.35044
18	16	13.24327	13.90544	28.90841	30.35383
19	17	13.94340	14.64057	31.95853	33.55646
20	18	14.63019	15.36170	35.20931	36.96977
21	19	15.30391	16.06910	38.67221	40.60582
22	20	15.96478	16.76302	42.35932	44.47729
23	999	50.00000	52.50000		

	Q	R	S
1	tax	0.05	g
2	n	ga[n]i	aga[n]i
3	1	=(1-(1+U$1)^-Q3)/U$1/(1+T$1)	=R3*(1+R$1)
4	2	=(1-(1+U$1)^-Q4)/U$1/(1+T$1)	=R4*(1+R$1)
5	3	=(1-(1+U$1)^-Q5)/U$1/(1+T$1)	=R5*(1+R$1)

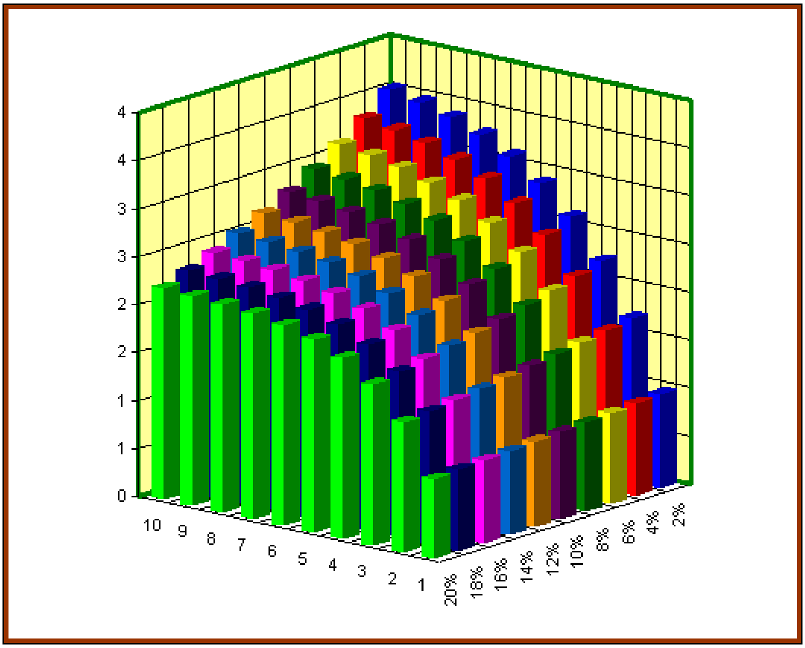
	T	U
1	0.03	=(R1-T1)/(1+T1)
2	gs[n]i	ags[n]i
3	=R3*(1+R$1)^Q3	=T3*(1+R$1)
4	=R4*(1+R$1)^Q4	=T4*(1+R$1)
5	=R5*(1+R$1)^Q5	=T5*(1+R$1)

Esercizio 2.11 (2) - Rendite in progressione geometrica >>>

Tabulare i valori attuali di rendite posticipate in progressione geometrica di ragione g = - 25% per i diversi tassi effettivi da 2% a 20% (oppure da k% a 10k%) e per le diverse durate da 1 ad 10 (oppure da w a 10w) periodi unitari

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
31	*Dur*	*g*	*-25%*	*Tassi*							
32	*n*	*2%*	*4%*	*6%*	*8%*	*10%*	*12%*	*14%*	*16%*	*18%*	*20%*
33	*1*	*0.980*	*0.962*	*0.943*	*0.926*	*0.909*	*0.893*	*0.877*	*0.862*	*0.847*	*0.833*
34	*2*	*1.701*	*1.655*	*1.611*	*1.569*	*1.529*	*1.491*	*1.454*	*1.419*	*1.386*	*1.354*
35	*3*	*2.231*	*2.155*	*2.083*	*2.015*	*1.952*	*1.891*	*1.834*	*1.780*	*1.728*	*1.680*
36	*4*	*2.621*	*2.516*	*2.417*	*2.326*	*2.240*	*2.159*	*2.084*	*2.013*	*1.946*	*1.883*
37	*5*	*2.908*	*2.776*	*2.654*	*2.541*	*2.436*	*2.339*	*2.248*	*2.163*	*2.084*	*2.010*
38	*6*	*3.118*	*2.963*	*2.821*	*2.690*	*2.570*	*2.459*	*2.356*	*2.261*	*2.172*	*2.090*
39	*7*	*3.273*	*3.098*	*2.939*	*2.794*	*2.661*	*2.540*	*2.427*	*2.324*	*2.228*	*2.139*
40	*8*	*3.387*	*3.196*	*3.023*	*2.866*	*2.724*	*2.593*	*2.474*	*2.365*	*2.264*	*2.170*
41	*9*	*3.471*	*3.266*	*3.082*	*2.916*	*2.766*	*2.630*	*2.505*	*2.391*	*2.286*	*2.190*
42	*10*	*3.533*	*3.317*	*3.124*	*2.951*	*2.795*	*2.654*	*2.525*	*2.408*	*2.301*	*2.202*

	W	X
31	*Dur*	*g*
32	*n*	*0.02*
33	*1*	*=SE(X$32<>$Y$31;(1-(1+(X$32-$Y$31)/(1+$Y$31))^-$W33)/(X$32-$Y$31);$W33/(1+X$32))*
34	*=W33+W$33*	*=SE(X$32<>$Y$31;(1-(1+(X$32-$Y$31)/(1+$Y$31))^-$W34)/(X$32-$Y$31);$W34/(1+X$32))*
35	*=W34+W$33*	*=SE(X$32<>$Y$31;(1-(1+(X$32-$Y$31)/(1+$Y$31))^-$W35)/(X$32-$Y$31);$W35/(1+X$32))*



Esercizio 2.11 (3) - Rendite in progressione geometrica >>>

Calcolare il valore attuale di una rendita immediata anticipata con rate in progressione geometrica di prima rata pari ad € 1000 e ragione pari a 1.03, temporanea con durata pari a 13 anni (oppure perpetua) al tasso di interesse del 6% annuo.

$$\frac{i-g}{1+g}=\frac{0.06-0.03}{1.03}=0.029126 \quad \Rightarrow \quad V_0=1000\,\ddot{a}_{\overline{13}|0.029126}$$

$$V_0=1000\frac{1.06}{0.06-0.03}=1000\frac{1.06}{0.03}$$

	B	C	D	E
67	Rata	1000		
68	Ragione	1.03	3.0000%	
69	Durata	13		
70	Tasso	6.00%	2.9126%	2.8302%
71	n	Rate	Fattori	Valori
72	0	1000.00	1.000000	1000.00
73	1	1030.00	0.943396	971.70
74	2	1060.90	0.889996	944.20
75	3	1092.73	0.839619	917.47
76	4	1125.51	0.792094	891.51
77	5	1159.27	0.747258	866.28
78	6	1194.05	0.704961	841.76
79	7	1229.87	0.665057	817.94
80	8	1266.77	0.627412	794.79
81	9	1304.77	0.591898	772.29
82	10	1343.92	0.558395	750.44
83	11	1384.23	0.526788	729.20
84	12	1425.76	0.496969	708.56
85			Val Temp	11006.12
86			Val Temp	11006.12
87			Val Perp	35333.33

	B	C	D	E
67	Rata	1000		
68	Ragione	1.03	=C68-1	
69	Durata	13		
70	Tasso	0.06	=(C70-D68)/C68	=D70/(1+D70)
71	n	Rate	Fattori	Valori
72	0	=C67	=(1+C$46)^-B72	=C72*D72
73	1	=C72*C$68	=(1+C$46)^-B73	=C73*D73
74	2	=C73*C$68	=(1+C$46)^-B74	=C74*D74
83	11	=C82*C$68	=(1+C$46)^-B83	=C83*D83
84	12	=C83*C$68	=(1+C$46)^-B84	=C84*D84
85			Val Temp	=SOMMA(E72:E84)
86			Val Temp	=C67*(1-(1+D70)^-C69)/E70
87			Val Perp	=C67*(1+C70)/(C70-D68)

Esercizio 2.12 (1) - Rimborso di un prestito >>>

Trovare in quanto tempo si estingue un debito di € 10000, pagando rate annue posticipate di 800 al tasso effettivo annuo di interesse del 5%. Ai fini del periodo di rimborso, considerare un numero intero di rate e calcolare l'eventuale rata a saldo.

- ***Condizione di coerenza dei dati del problema***

$$\left.\begin{array}{l} A = 10000 \\ i = 0.05 \\ R = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{A}{R} = 12.5 \Rightarrow 1 > ai = 0.6250$$

- ***Calcolo del periodo di rimborso***

$$n = -\frac{lg(1-ai)}{lg(1+i)} = -\frac{lg\,0.375}{lg1.05} = \frac{0.980829}{0.048790} = 20.1030$$
$$20.1030 = [20.1030] + 0.1030 = 20 + 0.1030$$

- ***Hp 1 – Rata integrativa di tipo aggiuntivo***

$$A = R\,a_{\overline{[n]}|i} + R_1 v^{[n]+1} \Rightarrow 10000 = 800\,a_{\overline{20}|0.05} + R_1 1.05^{-21}$$
$$R_1 = (10000 - 800\,a_{\overline{20}|0.05})\,1.05^{21}$$
$$= (10000 - 800 \cdot 12.4622)\,2.7859 = 30.23 \cdot 2.7859 = 84.22$$

- ***Hp 2 – Ultima rata con integrazione***

$$A = R\,a_{\overline{[n-1]}|i} + R_2 v^{[n]} \Rightarrow 10000 = 800\,a_{\overline{19}|0.05} + R_2 1.05^{-20}$$
$$R_2 = (10000 - 800\,a_{\overline{19}|0.05})\,1.05^{20}$$
$$= (10000 - 800 \cdot 12.0853)\,2.6532 = 331.74 \cdot 2.6532 = 880.21$$
$$880.21 = 800 + \frac{84.22}{1.05}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Debito	A	10000	.	Tempi	Rate	Fattori	Val Att	.	Tempi	Rate	Fattori	Val Att
2	Tasso	i	0.05		0					0			
3	Rata	R	800		1	800	0.9524	761.90		1	800	0.9524	761.90
4					2	800	0.9070	725.62		2	800	0.9070	725.62
5	n		20.1030		3	800	0.8638	691.07		3	800	0.8638	691.07
6	[n]		20		4	800	0.8227	658.16		4	800	0.8227	658.16
7					5	800	0.7835	626.82		5	800	0.7835	626.82
8	a[n]i		12.4622		6	800	0.7462	596.97		6	800	0.7462	596.97
9	R1		84.22		7	800	0.7107	568.55		7	800	0.7107	568.55
10					8	800	0.6768	541.47		8	800	0.6768	541.47
11	a[n-1]i		12.0853		9	800	0.6446	515.69		9	800	0.6446	515.69
12	R2		880.21		10	800	0.6139	491.13		10	800	0.6139	491.13
13					11	800	0.5847	467.74		11	800	0.5847	467.74
14					12	800	0.5568	445.47		12	800	0.5568	445.47
15					13	800	0.5303	424.26		13	800	0.5303	424.26
16					14	800	0.5051	404.05		14	800	0.5051	404.05
17					15	800	0.4810	384.81		15	800	0.4810	384.81
18					16	800	0.4581	366.49		16	800	0.4581	366.49
19					17	800	0.4363	349.04		17	800	0.4363	349.04
20					18	800	0.4155	332.42		18	800	0.4155	332.42
21					19	800	0.3957	316.59		19	800	0.3957	316.59
22					20	800	0.3769	301.51		20		2.6533	880.21
23					21		2.7860	84.22		21			

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Debito	A	10000	.	Tempi	Rate	Fattori	Val Att
2	Tasso	i	0.05		0			
3	Rata	R	800		1	=$C$3	=(1+$C$2)^-E3	=F3*G3
4					2	=$C$3	=(1+$C$2)^-E4	=F4*G4
5	n		=-LN(1-C1*C2/C3)/LN(1+C2)		3	=$C$3	=(1+$C$2)^-E5	=F5*G5
6	[n]		=INT(C5)		4	=$C$3	=(1+$C$2)^-E6	=F6*G6
7					5	=$C$3	=(1+$C$2)^-E7	=F7*G7
8	a[n]i		=(1-(1+C2)^-C6)/C2		6	=$C$3	=(1+$C$2)^-E8	=F8*G8
9	R1		=(C1-C3*C8)*G23		7	=$C$3	=(1+$C$2)^-E9	=F9*G9
10					8	=$C$3	=(1+$C$2)^-E10	=F10*G10
11	a[n-1]i		=(1-(1+C2)^-(C6-1))/C2		9	=$C$3	=(1+$C$2)^-E11	=F11*G11
12	R2		=(C1-C3*C11)*L22		10	=$C$3	=(1+$C$2)^-E12	=F12*G12
21					19	=$C$3	=(1+$C$2)^-E21	=F21*G21
22					20	=$C$3	=(1+$C$2)^-E22	=F22*G22
23					21		=(1+$C$2)^E23	=(C1-SOMMA(H3:H22))*G23

	A	B	C	D	J	K	L	M
1	Debito	A	10000	.	Tempi	Rate	Fattori	Val Att
2	Tasso	i	0.05		0			
3	Rata	R	800		1	=$C$3	=(1+$C$2)^-J3	=K3*L3
4					2	=$C$3	=(1+$C$2)^-J4	=K4*L4
5	n		=-LN(1-C1*C2/C3)/LN(1+C2)		3	=$C$3	=(1+$C$2)^-J5	=K5*L5
6	[n]		=INT(C5)		4	=$C$3	=(1+$C$2)^-J6	=K6*L6
7					5	=$C$3	=(1+$C$2)^-J7	=K7*L7
8	a[n]i		=(1-(1+C2)^-C6)/C2		6	=$C$3	=(1+$C$2)^-J8	=K8*L8
9	R1		=(C1-C3*C8)*G23		7	=$C$3	=(1+$C$2)^-J9	=K9*L9
10					8	=$C$3	=(1+$C$2)^-J10	=K10*L10
11	a[n-1]i		=(1-(1+C2)^-(C6-1))/C2		9	=$C$3	=(1+$C$2)^-J11	=K11*L11
12	R2		=(C1-C3*C11)*L22		10	=$C$3	=(1+$C$2)^-J12	=K12*L12
21					19	=$C$3	=(1+$C$2)^-J21	=K21*L21
22					20		=(1+$C$2)^J22	=(C1-SOMMA(M3:M21))*L22
23					21			

Esercizio 2.12 (2) - Ricerca della rata >>>

Un soggetto versa mensilmente e anticipatamente € 1000 per 10 anni al fine di ottenere, alla conclusione dei versamenti, una rendita mensile posticipata per un periodo di tempo pari al doppio di quello di versamento (20 anni). Ipotizzando di utilizzare un tasso effettivo annuo di 0.08, calcolare la rata mensile che il soggetto potrà ottenere.

- ***Dati del problema***

$$\text{Rata mensile da versare} = R_{\frac{1}{m}} = R_{\frac{1}{12}} = 1000$$

$$\text{Rata annua da versare} = R = m R_{\frac{1}{m}} = 12 R_{\frac{1}{12}} = 12000$$

$$i = \text{Tasso di interesse} = 0.08$$

$$n_1 = \text{Durata versamenti} = 10$$

$$n_2 = \text{Durata incassi} = 2 n_1 = 20$$

- ***Montante al termine del periodo di versamento***

$$M = R\,\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n_1}|i} = R\frac{d}{\rho_m}\ddot{s}_{\overline{n_1}|i} = R\frac{i}{\rho_m}s_{\overline{n_1}|i} = 12000\frac{0.08}{\rho_{12}}s_{\overline{10}|0.08}$$

- ***Rata annua e mensile da riscuotere***

$$\hat{R} = \frac{M}{a^{(m)}_{\overline{n_2}|i}} = \frac{M}{\frac{i}{j_m}a_{\overline{n_2}|i}} = R\frac{\frac{i}{\rho_m}s_{\overline{n_1}|i}}{\frac{i}{j_m}a_{\overline{n_2}|i}} = R\frac{j_m\,s_{\overline{n_1}|i}}{\rho_m\,a_{\overline{n_2}|i}} =$$
$$= R\,r^{\frac{1}{m}}\frac{s_{\overline{n_1}|i}}{a_{\overline{n_2}|i}} = 12000\cdot 1.08^{\frac{1}{12}}\frac{s_{\overline{10}|0.08}}{a_{\overline{20}|0.08}}$$

$$\hat{R} = R\,r^{\frac{1}{m}}\frac{s_{\overline{n_1}|i}}{a_{\overline{2\,n_1}|i}} = R\,r^{\frac{1}{m}}\frac{s_{\overline{n_1}|i}}{a_{\overline{n_1}|i} + v^{n_1}a_{\overline{n_1}|i}} = R\,r^{\frac{1}{m}}\frac{r^{n_1}a_{\overline{n_1}|i}}{a_{\overline{n_1}|i} + v^{n_1}a_{\overline{n_1}|i}}$$
$$= R\frac{r^{n_1+\frac{1}{m}}}{1+v^{n_1}} = 12000\frac{1.08^{10+\frac{1}{12}}}{1+1.08^{-10}} = 17819.78$$
$$\Rightarrow\quad \hat{R}_{\frac{1}{12}} = \frac{\hat{R}}{12} = 1484.98$$

	A	B	C
26	*Versam mensile*		1000
27	*Frazionamento*	*m*	12
28	*Versam annuo*		12000
29	*Durata1*	*n1*	10
30	*Durata2*	*n2*	20
31	*Tasso*	*i*	0.08
32			
33	*s[n1]i*		14.4866
34	*a[n2]i*		9.8181
35			
36	*Rata annua*		17819.78
37	*Rata mensile*		1484.98
38			
39	*Rata annua*		17819.78

	A	B	C
26	*Versam mensile*		1000
27	*Frazionamento*	*m*	12
28	*Versam annuo*		=C26*C27
29	*Durata1*	*n1*	10
30	*Durata2*	*n2*	20
31	*Tasso*	*i*	0.08
32			
33	*s[n1]i*		=((1+C31)^C29-1)/C31
34	*a[n2]i*		=(1-(1+C31)^-C30)/C31
35			
36	*Rata annua*		=C28*(1+C31)^(1/C27)*C33/C34
37	*Rata mensile*		=C36/C27
38			
39	*Rata annua*		=C28*(1+C31)^(C29+1/C27)/(1+(1+C31)^-C29)

	E	F	G	H	I
26	Tempi	Rate	Correzione	Fattori	Val Att
27	0				
28	1	12000.00	1.006434	0.925926	11182.60
29	2	12000.00	1.006434	0.857339	10354.26
30	3	12000.00	1.006434	0.793832	9587.28
31	4	12000.00	1.006434	0.735030	8877.11
32	5	12000.00	1.006434	0.680583	8219.55
33	6	12000.00	1.006434	0.630170	7610.69
34	7	12000.00	1.006434	0.583490	7046.94
35	8	12000.00	1.006434	0.540269	6524.94
36	9	12000.00	1.006434	0.500249	6041.61
37	10	12000.00	1.006434	0.463193	5594.08
38	11	-17819.78	1.000000	0.428883	-7642.60
39	12	-17819.78	1.000000	0.397114	-7076.48
40	13	-17819.78	1.000000	0.367698	-6552.30
41	14	-17819.78	1.000000	0.340461	-6066.94
42	15	-17819.78	1.000000	0.315242	-5617.54
43	16	-17819.78	1.000000	0.291890	-5201.42
44	17	-17819.78	1.000000	0.270269	-4816.13
45	18	-17819.78	1.000000	0.250249	-4459.38
46	19	-17819.78	1.000000	0.231712	-4129.06
47	20	-17819.78	1.000000	0.214548	-3823.20
48	21	-17819.78	1.000000	0.198656	-3540.00
49	22	-17819.78	1.000000	0.183941	-3277.78
50	23	-17819.78	1.000000	0.170315	-3034.98
51	24	-17819.78	1.000000	0.157699	-2810.17
52	25	-17819.78	1.000000	0.146018	-2602.01
53	26	-17819.78	1.000000	0.135202	-2409.27
54	27	-17819.78	1.000000	0.125187	-2230.80
55	28	-17819.78	1.000000	0.115914	-2065.56
56	29	-17819.78	1.000000	0.107328	-1912.55
57	30	-17819.78	1.000000	0.099377	-1770.88
58					0.00

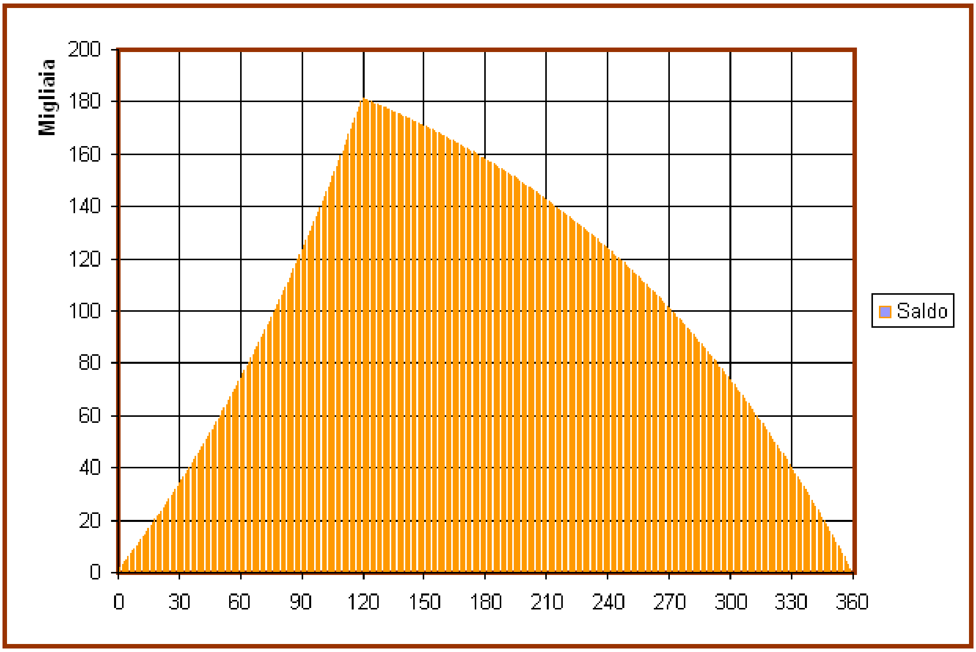
	E	F	G	H	I
26	Tempi	Rate	Correzione	Fattori	Val Att
27	0				
28	1	=C28	=(1+C31)^(1/C27)	=(1+$C$31)^-E28	=F28*G28*H28
29	2	=F28	=G28	=(1+$C$31)^-E29	=F29*G29*H29
30	3	=F29	=G29	=(1+$C$31)^-E30	=F30*G30*H30
36	9	=F35	=G35	=(1+$C$31)^-E36	=F36*G36*H36
37	10	=F36	=G36	=(1+$C$31)^-E37	=F37*G37*H37
38	11	=-C36	1	=(1+$C$31)^-E38	=F38*G38*H38
39	12	=F38	=G38	=(1+$C$31)^-E39	=F39*G39*H39
40	13	=F39	=G39	=(1+$C$31)^-E40	=F40*G40*H40
56	29	=F55	=G55	=(1+$C$31)^-E56	=F56*G56*H56
57	30	=F56	=G56	=(1+$C$31)^-E57	=F57*G57*H57
58					=SOMMA(I28:I57)

$$\mathop{\Box}_{k=0}^{12(n_1+n_2)} R_{(k)} = \left(\mathop{\Box}_{k=0}^{12n_1-1} R_{\frac{1}{m}}, 0, \mathop{\Box}_{k=12n_1+1}^{12(n_1+n_2)} \hat{R}_{\frac{1}{m}} \right)$$

$$\mathop{\Box}_{k=0}^{12(n_1+n_2)} M_k = \left(R_{(0)}, \mathop{\Box}_{k=0}^{12(n_1+n_2)} \left(M_{k-1}\, r^{\frac{1}{m}} + R_{(k)}\right) \right)$$

	E	F	G
60	Tempi	Rate	Saldo
61	0	1000.00	1000.00
62	1	1000.00	2006.43
63	2	1000.00	3019.34
64	3	1000.00	4038.77
65	4	1000.00	5064.76
66	5	1000.00	6097.34
177	116	1000.00	173729.96
178	117	1000.00	175847.74
179	118	1000.00	177979.15
180	119	1000.00	180124.27
181	120	0.00	181283.20
182	121	-1484.98	180964.60
183	122	-1484.98	180643.95
184	123	-1484.98	180321.23
185	124	-1484.98	179996.45
186	125	-1484.98	179669.57
417	356	-1484.98	5845.60
418	357	-1484.98	4398.23
419	358	-1484.98	2941.54
420	359	-1484.98	1475.49
421	360	-1484.98	0.00

	E	F	G
60	Tempi	Rate	Saldo
61	0	=C26	=F61
62	1	=F61	=G61*(1+C$31)^(1/C$27)+F62
63	2	=F62	=G62*(1+C$31)^(1/C$27)+F63
64	3	=F63	=G63*(1+C$31)^(1/C$27)+F64
65	4	=F64	=G64*(1+C$31)^(1/C$27)+F65
66	5	=F65	=G65*(1+C$31)^(1/C$27)+F66
177	116	=F176	=G176*(1+C$31)^(1/C$27)+F177
178	117	=F177	=G177*(1+C$31)^(1/C$27)+F178
179	118	=F178	=G178*(1+C$31)^(1/C$27)+F179
180	119	=F179	=G179*(1+C$31)^(1/C$27)+F180
181	120	0	=G180*(1+C$31)^(1/C$27)+F181
182	121	=-C37	=G181*(1+C$31)^(1/C$27)+F182
183	122	=F182	=G182*(1+C$31)^(1/C$27)+F183
184	123	=F183	=G183*(1+C$31)^(1/C$27)+F184
185	124	=F184	=G184*(1+C$31)^(1/C$27)+F185
186	125	=F185	=G185*(1+C$31)^(1/C$27)+F186
417	356	=F416	=G416*(1+C$31)^(1/C$27)+F417
418	357	=F417	=G417*(1+C$31)^(1/C$27)+F418
419	358	=F418	=G418*(1+C$31)^(1/C$27)+F419
420	359	=F419	=G419*(1+C$31)^(1/C$27)+F420
421	360	=F420	=G420*(1+C$31)^(1/C$27)+F421



Esercizio 2.12 (3) - Calcolo di una pensione >>>

Un soggetto versa annualmente e posticipatamente un contributo di € 10000 per un certo numero di anni al fine di ottenere, alla conclusione dei versamenti, una pensione annua posticipata dello stesso importo. Calcolare la durata del periodo di pensione al variare della durata del periodo di contribuzione (e ovviamente del tasso di rendimento applicato al montante contributivo). Indicare anche per quale durata del periodo contributivo la rendita pensionistica risulta perpetua.

$$\begin{aligned}
&\textit{Contributo annuo da versare} = R = 10000 \\
&i = \textit{Tasso di rendimento} \\
&n_1 = \textit{Durata del periodo di contribuzione} \\
&n_2 = \textit{Durata del periodo di pensionamento}
\end{aligned}$$

- ***Montante contributivo al termine del periodo di versamento***

$$\boxed{M = R\, s_{\overline{n_1}|i}}$$

- ***Rata annua di pensione***

$$\boxed{R = \frac{M}{a_{\overline{n_2}|i}} = \frac{R\, s_{\overline{n_1}|i}}{a_{\overline{n_2}|i}}}$$

- ***Durata del periodo di pensionamento***

$$s_{\overline{n_1}|i} = a_{\overline{n_2}|i} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+i)^{n_1}-1}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{-n_2} = 2-(1+i)^{n_1}$$

$$-n_2\, lg(1+i) = lg(2-(1+i)^{n_1}) \quad \Rightarrow \quad n_2 = -\frac{lg(2-(1+i)^{n_1})}{lg(1+i)}$$

- ***Rendita pensionistica infinita***

$$n_1\, lg(1+i) = lg(2-(1+i)^{-n_2}) \quad \Rightarrow \quad n_1 = \frac{lg(2-(1+i)^{-n_2})}{lg(1+i)}$$

$$\lim_{n_2 \to +\infty} n_1 = \lim_{n_2 \to +\infty} \frac{lg(2-(1+i)^{-n_2})}{lg(1+i)} = \frac{lg\, 2}{lg(1+i)}$$

	O	P	Q	R
1	Tasso	i	4.00%	
2	n1		10.000000	17.672988
3	n2		16.684968	769.419598
4	n1:perp		17.672988	
5				
6	s[n1]i		12.006107	25.000000
7	a[n2]i		12.006107	25.000000

	O	P	Q	R
1	Tasso	i	0.04	
2	n1		10	=Q4-0.000000000001
3	n2		=-(LN(2-(1+Q1)^Q2)/LN(1+Q1))	=-(LN(2-(1+Q1)^R2)/LN(1+Q1))
4	n1: perp		=LN(2)/LN(1+Q1)	
5				
6	s[n1]i		=((1+Q1)^Q2-1)/Q1	=((1+Q1)^R2-1)/Q1
7	a[n2]i		=+(1-(1+Q1)^-Q3)/Q1	=+(1-(1+Q1)^-R3)/Q1

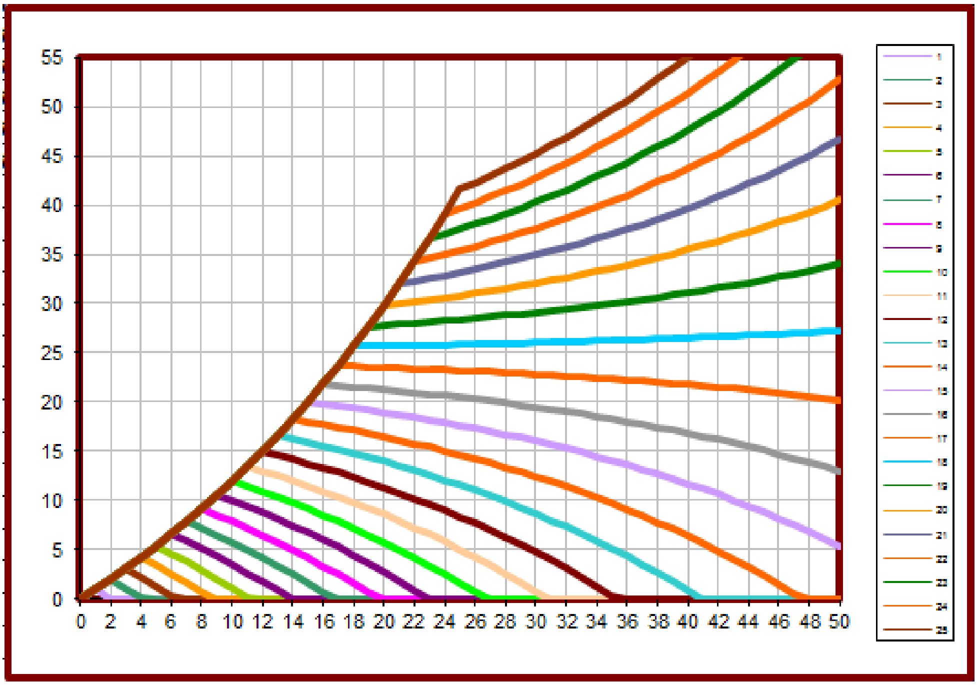
- ***Andamento del montante contributivo***

$$\square_{n_1=1}^{\cdots}\ \square_{t=1}^{\cdots}\ M_t^{(n_1)} = max(M_{t-1}^{(n_1)}(1+i)+(n_1 \geq t)-(n_1 < t),0)$$

	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	2	0.0400	2.0400	2.0400	2.0400	2.0400	2.0400	2.0400	2.0400	2.0400	2.0400
5	3	0.0000	1.1216	3.1216	3.1216	3.1216	3.1216	3.1216	3.1216	3.1216	3.1216
6	4	0.0000	0.1665	2.2465	4.2465	4.2465	4.2465	4.2465	4.2465	4.2465	4.2465
7	5	0.0000	0.0000	1.3363	3.4163	5.4163	5.4163	5.4163	5.4163	5.4163	5.4163
8	6	0.0000	0.0000	0.3898	2.5530	4.6330	6.6330	6.6330	6.6330	6.6330	6.6330
9	7	0.0000	0.0000	0.0000	1.6551	3.8183	5.8983	7.8983	7.8983	7.8983	7.8983
10	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.7213	2.9710	5.1342	7.2142	9.2142	9.2142	9.2142
11	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.0899	4.3396	6.5028	8.5828	10.5828	10.5828
12	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.1735	3.5132	5.7629	7.9261	10.0061	12.0061
13	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2204	2.6537	4.9934	7.2432	9.4064	11.4864
14	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.7599	4.1932	6.5329	8.7826	10.9458
15	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8302	3.3609	5.7942	8.1339	10.3836
16	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.4953	5.0260	7.4593	9.7990
17	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.5951	4.2270	6.7576	9.1909
18	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6589	3.3961	6.0279	8.5586
19	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.5319	5.2691	7.9009
20	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.6332	4.4798	7.2170
21	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6985	3.6590	6.5056
22	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.8054	5.7659
23	21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.9176	4.9965
24	22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.9943	4.1964
25	23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0341	3.3642
26	24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.4988
27	25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.5987

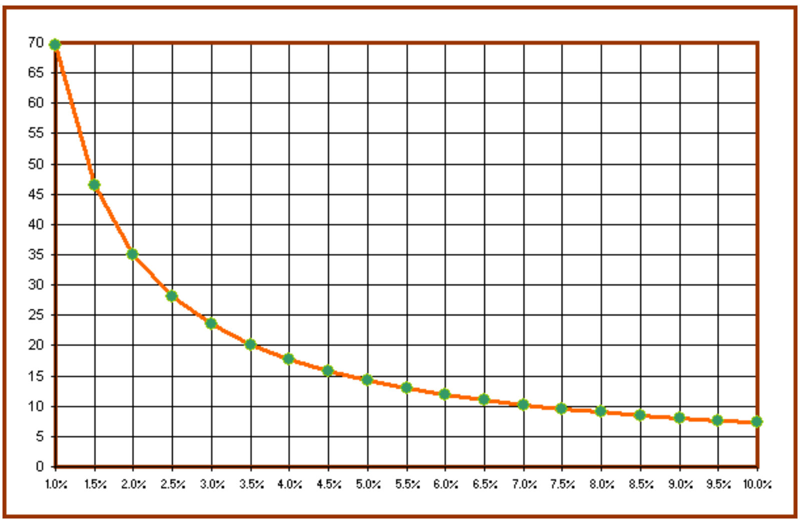
	T	U
1		*1*
2	*0*	*0*
3	*1*	*1*
4	*2*	*=MAX(U3*(1+$Q$1)+(U$1>=$T4)-(U$1<$T4);0)*
5	*3*	*=MAX(U4*(1+$Q$1)+(U$1>=$T5)-(U$1<$T5);0)*
6	*4*	*=MAX(U5*(1+$Q$1)+(U$1>=$T6)-(U$1<$T6);0)*

	V
1	*2*
2	*0*
3	*1*
4	*=MAX(V3*(1+$Q$1)+(V$1>=$T4)-(V$1<$T4);0)*
5	*=MAX(V4*(1+$Q$1)+(V$1>=$T5)-(V$1<$T5);0)*
6	*=MAX(V5*(1+$Q$1)+(V$1>=$T6)-(V$1<$T6);0)*



	O	P	Q	R
9	***Tassi***		***n1: perp***	***n1: perp appr***
10	1.00%		69.660717	69.661292
11	1.50%		46.555526	46.556386
12	2.00%		35.002789	35.003933
13	2.50%		28.071035	28.072461
14	3.00%		23.449772	23.451480
15	3.50%		20.148792	20.150779
16	4.00%		17.672988	17.675253
17	4.50%		15.747302	15.749844
18	5.00%		14.206699	14.209517
19	5.50%		12.946157	12.949250
20	6.00%		11.895661	11.899027
21	6.50%		11.006739	11.010376
22	7.00%		10.244768	10.248676
23	7.50%		9.584359	9.588536
24	8.00%		9.006468	9.010913
25	8.50%		8.496535	8.501246
26	9.00%		8.043232	8.048209
27	9.50%		7.637618	7.642860
28	10.00%		7.272541	7.278045

	O	P	Q	R
9	***Tassi***		***n1: perp***	***n1: perp appr***
10	0.01		=LN(2)/LN(1+O10)	=LN(2)*(1/O10+1/2)
11	0.015		=LN(2)/LN(1+O11)	=LN(2)*(1/O11+1/2)
12	0.02		=LN(2)/LN(1+O12)	=LN(2)*(1/O12+1/2)



Esercizio 2.12 (4) - Investimento in beni culturali >>>

Una istituzione pubblica operante nell'ambito dei beni artistici e culturali effettua un investimento, che prevede costi e ricavi tali da permettere valutazioni di tipo finanziario, economico e sociale:

- ***Tempo finale dei costi d'investimento*** $\boxed{M}$
- ***Tempi iniziale e finale di valutazione*** $\boxed{P\,,N}$
- ***Tasso di mercato di riferimento*** $\boxed{i}$
- ***Costi d'investimento***

$$\boxed{\sum_{t=0}^{M} C_t}$$

- ***Costi di gestione (costo iniziale G_1 , tasso di incremento i_G)***

$$\boxed{\sum_{t=1}^{N} G_t = G_1\,(1+i_G)^{t-1}}$$

- ***Ricavi per vendita biglietti (ricavo iniziale B_1 , tasso di incremento i_B)***

$$\boxed{\sum_{t=1}^{N} B_t = B_1\,(1+i_B)^{t-1}}$$

- ***Ricavi per vendita libri (ricavo iniziale L_1 , tasso di incremento i_L)***

$$\boxed{\forall_{t=1}^{N} \; L_t = L_1 (1+i_L)^{t-1}}$$

- ***Introiti diversi (introito iniziale D_1 e tasso di incremento i_D)***

$$\boxed{\forall_{t=1}^{N} \; D_t = D_1 (1+i_D)^{t-1}}$$

- ***Introiti turistici (introito iniziali T_1 e tasso di incremento i_T)***

$$\boxed{\forall_{t=1}^{N} \; T_t = T_1 (1+i_T)^{t-1}}$$

- ***Imposte sui ricavi per vendita libri e introiti diversi (aliquota d'imposta a)***

$$\boxed{\forall_{t=1}^{N} \; S_t = a(L_t + D_t)}$$

Considerando i tre diversi cash-flow:

- ***Cash-flow finanziario, derivante dai costi di investimento e di gestione, dalle imposte, dai ricavi per vendita biglietti e libri e dagli introiti diversi***

$$\boxed{\forall_{t=0}^{N} \; Cff_t = B_t + L_t + D_t - C_t - G_t - S_t}$$

- ***Cash-flow economico ottenuto dal cash-flow finanziario non considerando le imposte***

$$\boxed{\forall_{t=0}^{N} \; Cfe_t = Cff_t + S_t}$$

- ***Cash-flow sociale ottenuto dal cash-flow economico aggiungendo gli introiti di tipo turistico***

$$\boxed{\mathop{\square}_{t=0}^{N} Cfs_t = Cfe_t + T_t}$$

determinare se e per quali orizzonti temporali W_f , W_e e W_s l'investimento artistico culturale presenta, nelle tre diverse ipotesi (finanziaria, economica e sociale), un tasso interno di rendimento $\hat{i}_{f,W_f}$, $\hat{i}_{e,W_e}$ e $\hat{i}_{s,W_s}$ non inferiore al prefissato tasso annuo di rendimento $\bar{i}$.

- ***Orizzonte del T.I.R. finanziario (costi di investimento e di gestione, dalle imposte, dai ricavi per vendita biglietti e libri e dagli introiti diversi)***

$$\boxed{\mathop{\square}_{Q=P}^{N} \sum_{K=0}^{Q} Cff_t (1 + \hat{i}_{f,Q})^{-k} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{i}_{f,W_f-1} < \bar{i} \le \hat{i}_{f,W_f}}$$

- ***Orizzonte del T.I.R. economico (idem, non considerando le imposte)***

$$\boxed{\mathop{\square}_{Q=P}^{N} \sum_{K=0}^{Q} Cfe_t (1 + \hat{i}_{e,Q})^{-k} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{i}_{e,W_e-1} < \bar{i} \le \hat{i}_{e,W_e}}$$

- ***Orizzonte del T.I.R. sociale (idem, aggiungendo gli introiti di tipo turistico)***

$$\boxed{\mathop{\square}_{Q=P}^{N} \sum_{K=0}^{Q} Cfs_t (1 + \hat{i}_{s,Q})^{-k} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{i}_{s,W_s-1} < \bar{i} \le \hat{i}_{s,W_s}}$$

	A	B	C	D	E
1	*Tempo finale investimento*	M	2		
2	*Tempo iniziale valutazione*	P	15		
3	*Tempo finale valutazione*	N	30		
4	*Tasso annuo di riferimento*	i	3.00%		
5			50000		
6	*Costi investimento*	C_t	10000		
7			5000	*Incr*	
8	*Costi iniziali gestione*	G_1	500	i_G	10.00%
9	*Ricavi iniziali per biglietti*	B_1	1000	i_B	10.00%
10	*Ricavi iniziali per libri*	L_1	300	i_L	15.00%
11	*Introiti iniziali diversi*	D_1	200	i_D	5.00%
12	*Introiti iniziali turistici*	T_1	1000	i_T	7.00%
13	*Aliquota d'imposta*	a	40.00%		

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
19	t	C_t	G_t	B_t	L_t	D_t	T_t	S_t	Cff_t	Cfe_t	Cfs_t
20	0	50000	0	0	0	0	0	0	-50000	-50000	-50000
21	1	10000	500	1000	300	200	1000	200	-9200	-9000	-8000
22	2	5000	550	1100	345	210	1070	222	-4117	-3895	-2825
23	3		605	1210	397	221	1145	247	975	1222	2367
24	4		666	1331	456	232	1225	275	1078	1353	2578
25	5		732	1464	525	243	1311	307	1193	1500	2811
26	6		805	1611	603	255	1403	343	1320	1664	3066
27	7		886	1772	694	268	1501	385	1463	1848	3348
28	8		974	1949	798	281	1606	432	1622	2054	3660
29	9		1072	2144	918	295	1718	485	1800	2285	4003
30	10		1179	2358	1055	310	1838	546	1998	2545	4383
31	11		1297	2594	1214	326	1967	616	2221	2836	4803
32	12		1427	2853	1396	342	2105	695	2469	3164	5269
33	13		1569	3138	1605	359	2252	786	2748	3533	5786
34	14		1726	3452	1846	377	2410	889	3060	3949	6359
35	15		1899	3797	2123	396	2579	1007	3410	4417	6996
36	16		2089	4177	2441	416	2759	1143	3803	4946	7705
37	17		2297	4595	2807	437	2952	1298	4244	5541	8494
38	18		2527	5054	3228	458	3159	1475	4739	6214	9373
39	19		2780	5560	3713	481	3380	1678	5296	6974	10354
40	20		3058	6116	4270	505	3617	1910	5923	7833	11449
41	21		3364	6727	4910	531	3870	2176	6628	8804	12674
42	22		3700	7400	5646	557	4141	2481	7422	9904	14044
43	23		4070	8140	6493	585	4430	2831	8317	11149	15579
44	24		4477	8954	7467	614	4741	3233	9326	12559	17299
45	25		4925	9850	8588	645	5072	3693	10464	14157	19230
46	26		5417	10835	9876	677	5427	4221	11749	15970	21398
47	27		5959	11918	11357	711	5807	4827	13200	18027	23835
48	28		6555	13110	13061	747	6214	5523	14839	20362	26576
49	29		7210	14421	15020	784	6649	6321	16693	23014	29663
50	30		7932	15863	17273	823	7114	7238	18789	26027	33142

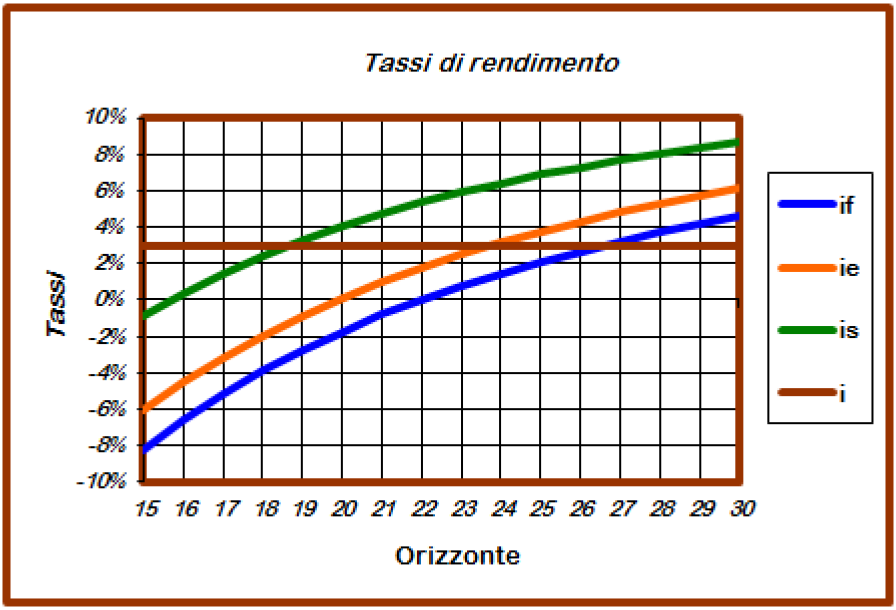
	F	G	H	I	J	K
19	t	C_t	G_t	B_t	L_t	D_t
20	0	=C5	0	0	0	0
21	=F20+1	=C6	=C8	=C9	=C10	=C11
22	=F21+1	=C7	=H21*(1+E$8)	=I21*(1+E$9)	=J21*(1+E$10)	=K21*(1+E$11)
23	=F22+1		=H22*(1+E$8)	=I22*(1+E$9)	=J22*(1+E$10)	=K22*(1+E$11)
24	=F23+1		=H23*(1+E$8)	=I23*(1+E$9)	=J23*(1+E$10)	=K23*(1+E$11)
25	=F24+1		=H24*(1+E$8)	=I24*(1+E$9)	=J24*(1+E$10)	=K24*(1+E$11)

	L	M	N	O	P
19	T_t	S_t	Cff_t	Cfe_t	Cfs_t
20	0	=(J20+K20)*C$13	=I20+J20+K20-G20-H20-M20	=N20+M20	=O20+L20
21	=C12	=(J21+K21)*C$13	=I21+J21+K21-G21-H21-M21	=N21+M21	=O21+L21
22	=L21*(1+E$12)	=(J22+K22)*C$13	=I22+J22+K22-G22-H22-M22	=N22+M22	=O22+L22
23	=L22*(1+E$12)	=(J23+K23)*C$13	=I23+J23+K23-G23-H23-M23	=N23+M23	=O23+L23
24	=L23*(1+E$12)	=(J24+K24)*C$13	=I24+J24+K24-G24-H24-M24	=N24+M24	=O24+L24
25	=L24*(1+E$12)	=(J25+K25)*C$13	=I25+J25+K25-G25-H25-M25	=N25+M25	=O25+L25

	F	Q	R	S	T	U	V
19	t	i_f	i_e	i_s	W_f	W_e	W_s
35	15	-8.23%	-6.09%	-0.92%	1	1	1
36	16	-6.61%	-4.54%	0.35%	1	1	1
37	17	-5.18%	-3.16%	1.46%	1	1	1
38	18	-3.90%	-1.95%	2.43%	1	1	1
39	19	-2.77%	-0.86%	3.29%	1	1	0
40	20	-1.75%	0.11%	4.06%	1	1	0
41	21	-0.83%	0.99%	4.74%	1	1	0
42	22	0.01%	1.78%	5.36%	1	1	0
43	23	0.77%	2.50%	5.92%	1	1	0
44	24	1.46%	3.16%	6.42%	1	0	0
45	25	2.10%	3.76%	6.88%	1	0	0
46	26	2.68%	4.32%	7.30%	1	0	0
47	27	3.22%	4.83%	7.69%	0	0	0
48	28	3.72%	5.30%	8.04%	0	0	0
49	29	4.18%	5.73%	8.37%	0	0	0
50	30	4.61%	6.14%	8.67%	0	0	0
51					27	24	19

	F	Q	R	S
35	=F34+1	=TIR.COST(N$20:N35;0%)	=TIR.COST(O$20:O35;0%)	=TIR.COST(P$20:P35;0%)
36	=F35+1	=TIR.COST(N$20:N36;0%)	=TIR.COST(O$20:O36;0%)	=TIR.COST(P$20:P36;0%)
49	=F48+1	=TIR.COST(N$20:N49;0%)	=TIR.COST(O$20:O49;0%)	=TIR.COST(P$20:P49;0%)
50	=F49+1	=TIR.COST(N$20:N50;0%)	=TIR.COST(O$20:O50;0%)	=TIR.COST(P$20:P50;0%)

	T	U	V
35	=(Q35<$C$4)*1	=(R35<$C$4)*1	=(S35<$C$4)*1
36	=(Q36<$C$4)*1	=(R36<$C$4)*1	=(S36<$C$4)*1
49	=(Q49<$C$4)*1	=(R49<$C$4)*1	=(S49<$C$4)*1
50	=(Q50<$C$4)*1	=(R50<$C$4)*1	=(S50<$C$4)*1
51	=$C$2+SOMMA(T19:T50)	=$C$2+SOMMA(U19:U50)	=$C$2+SOMMA(V19:V50)



Esercizi svolti in Apl Dyalog

Esercizio 2.2 (1) - Valore capitale di una rendita >>>

```
[0]      Z←T val1 W;RR;TT;I
[1]      (RR TT I)←W ⋄ Z←+/RR×I rtcc1 T-TT
```

```
      RR←500 100 300 200 400
      TT←1 2.5 3.75 5.5 7
      3 val1 RR TT 0.1
1419.99
```

Esercizio 2.3 (1) - Valori attuali e montanti >>>

```
      0 5 1 6 ¯3 ¯2 val1¨⊂RR(⍳5)0.1
1147.56 1848.15 1262.31 2032.97 862.176 948.393
```

Esercizio 2.3 (2) - Rendite in progressione aritmetica >>>

```
[0]      Z←N proga W;R;P
[1]      (R P)←W ⋄ Z←R+P×0,⍳N-1
```

```
      0 5 1 6 val1¨⊂(5 proga 500 100)(⍳5)0.1
2581.57 4157.65 2839.73 4573.42
```

Esercizio 2.3 (3) - Rendite in progressione geometrica >>>

```
[0]      Z←N progg W;R;Q
[1]      (R Q)←W ⋄ Z←R×Q*0,⍳N-1
```

```
      0 5 1 6 val1¨⊂(5 progg 500 1.2)(⍳5)0.1
2725.25 4389.05 2997.78 4827.96
```

Esercizio 2.4 (1) - Rendite: valori attuali e montanti >>>

```
[0]    Z←N ani I
[1]    Z←0 val1 1(⍳N)I
```

```
[0]    Z←N sni I
[1]    Z←N val1 1(⍳N)I
```

```
[0]    Z←N aani I
[1]    Z←1+(N-1)ani I
```

```
[0]    Z←N asni I
[1]    Z←¯1+(N+1)sni I
```

```
[0]    Z←W tani I;N;T
[1]    (N T)←W ⋄ Z←((N+T)ani I)-T ani I
```

```
[0]    Z←W taani I;N;T
[1]    (N T)←W ⋄ Z←((N+T)aani I)-T aani I
```

```
[0]    Z←W rend1 I;N;T
[1]    (N T)←W ⋄ Z←(⍳N)ani¨I
[2]    Z←Z,(⍳N)aani¨I
[3]    Z←Z,(⍳N)sni¨I
[4]    Z←Z,(⍳N)asni¨I
[5]    Z←Z,((⍳N),¨T)tani¨I
[6]    Z←Z,((⍳N),¨T)taani¨I
[7]    Z←⍉(6,N)⍴Z
```

```
[0]    Z←W rend2 I;N;T
[1]    (N T)←W ⋄ Z←N ani I
[2]    Z←Z,N aani I
[3]    Z←Z,(N,T)tani I
[4]    Z←Z,(N,T)taani I
```

```
      20 8 rend1 0.05
 0.952381  1        1        1.05     0.644609 0.676839
 1.85941   1.95238  2.05     2.1525   1.25852  1.32145
 2.72325   2.85941  3.1525   3.31013  1.8432   1.93536
 3.54595   3.72325  4.31013  4.52563  2.40004  2.52004
 4.32948   4.54595  5.52563  5.80191  2.93036  3.07688
 5.07569   5.32948  6.80191  7.14201  3.43543  3.6072
 5.78637   6.07569  8.14201  8.54911  3.91645  4.11227
 6.46321   6.78637  9.54911 10.0266   4.37456  4.59328
 7.10782   7.46321 11.0266  11.5779   4.81085  5.0514
 7.72173   8.10782 12.5779  13.2068   5.22637  5.48769
 8.30641   8.72173 14.2068  14.9171   5.62211  5.90321
 8.86325   9.30641 15.9171  16.713    5.999    6.29895
 9.39357   9.86325 17.713   18.5986   6.35794  6.67584
 9.89864  10.3936  19.5986  20.5786   6.69979  7.03478
10.3797   10.8986  21.5786  22.6575   7.02536  7.37663
10.8378   11.3797  23.6575  24.8404   7.33543  7.7022
11.2741   11.8378  25.8404  27.1324   7.63073  8.01227
11.6896   12.2741  28.1324  29.539    7.91197  8.30757
12.0853   12.6896  30.539   32.066    8.17982  8.58881
12.4622   13.0853  33.066   34.7193   8.43491  8.85666
```

```
      999 8 rend2 0.05
20 21 13.5368 14.2136
```

Esercizio 2.4 (2) - Rendite: valori attuali >>>

```
[0]     Z←rend3 WW;W;K;NW;NK
[1]     (W K NW NK)←WW ◇ Z←(W×⍳NW)∘.ani K×⍳NK
```

```
      rend3 1 0.02 15 5
 0.980392  0.961538 0.943396 0.925926 0.909091
 1.94156   1.88609  1.83339  1.78326  1.73554
 2.88388   2.77509  2.67301  2.5771   2.48685
 3.80773   3.6299   3.46511  3.31213  3.16987
 4.71346   4.45182  4.21236  3.99271  3.79079
 5.60143   5.24214  4.91732  4.62288  4.35526
 6.47199   6.00205  5.58238  5.20637  4.86842
 7.32548   6.73274  6.20979  5.74664  5.33493
 8.16224   7.43533  6.80169  6.24689  5.75902
 8.98259   8.1109   7.36009  6.71008  6.14457
 9.78685   8.76048  7.88687  7.13896  6.49506
10.5753    9.38507  8.38384  7.53608  6.81369
11.3484    9.98565  8.85268  7.90378  7.10336
12.1062   10.5631   9.29498  8.24424  7.36669
12.8493   11.1184   9.71225  8.55948  7.60608
```

Esercizio 2.4 (3) - Rendite: modifica delle condizioni >>>

```
[0]     Z←rend4 W;C;N;S;I;R1;DS;R2
[1]     (C N S I)←W ◇ R1←C÷N ani I
[2]     DS←R1×(N-S)ani I
[3]     Z←R1,DS,R2←DS÷(2×(N-S))aani 2×I
```

```
      rend4 10000 12 7 0.05
1128.25 4884.75 722.7
```

Esercizio 2.5 (1) - Rendite perpetue: valutazione >>>

```
[0]   Z←rend5 I
[1]   Z←÷I,di I
```

```
      rend5 0.05
20 21
```

Esercizio 2.5 (2) - Rendite perpetue: calcolo del tasso >>>

```
[0]   Z←rend6 W;R;R1;N
[1]   (R R1 N)←W ⋄ Z←¯1+(R1÷R1-R)*÷N
```

```
      rend6 160 640 8
0.0366146
```

Esercizio 2.6 (1) - Rendite frazionate: valutazione >>>

```
[0]   Z←W anif I;N;M
[1]   (N M)←W ⋄ Z←(I÷M jmi I)×N ani I
```

```
[0]   Z←W aanif I;N;M
[1]   (N M)←W ⋄ Z←((di I)÷M qmi I)×N aani I
```

```
[0]   Z←W snif I;N;M
[1]   (N M)←W ⋄ Z←(I÷M jmi I)×N sni I
```

```
[0]   Z←W asnif I;N;M
[1]   (N M)←W ⋄ Z←((di I)÷M qmi I)×N asni I
```

```
[0]    Z←W rend7 I;N;M;NM
[1]    (N M)←W ⋄ Z←(NM←N,¨M)anif¨I
[2]    Z←Z,NM aanif¨I
[3]    Z←Z,NM snif¨I
[4]    Z←Z,NM asnif¨I
[5]    Z←⍉(4,⍴M)⍴,Z
```

Esercizio 2.6 (2) - Rendite frazionate: valutazione >>>

```
[0]    Z←W rend8 JM1;R;N;M1;M2;I;JM2
[1]    (R N M1 M2)←W
[2]    ⎕←I←M1 ijm JM1 ⋄ ⎕←JM2←(M2 M1)jmjn JM1
[3]    Z←M2×R×(I÷JM2)×N sni I
```

```
      1000 10 3 4 rend8 0.05
0.05083796
0.04989655
51461.75
```

Esercizio 2.9 (1) - Rendite continue: valutazione >>>

```
      1000×(0.06÷wi 0.06)×10 ani 0.06
7578.75
      1000×((iw 0.06)÷0.06)×10 ani iw 0.06
7519.81
```

Esercizio 2.10 (1) - Rendite in progressione aritmetica >>>

```
[0]    Z←N iani W;I;G
[1]    (I G)←W ⋄ Z←((1-G)×N ani I)
[2]    Z←Z+G×((N aani I)-N×(vi I)*N)÷I
```

```
    Z←N aiani W;I;G
    (I G)←W ⋄ Z←(ri I)×N iani W
```

```
    Z←N isni W;I;G
    (I G)←W ⋄ Z←((1-G)×N sni I)
    Z←Z+G×((N asni I)-N)÷I
```

```
    Z←N aisni W;I;G
    (I G)←W ⋄ Z←(ri I)×N isni W
```

```
    Z←N rend9 W
    Z←(⍳N)iani¨⊂W
    Z←Z,(⍳N)aiani¨⊂W
    Z←Z,(⍳N)isni¨⊂W
    Z←Z,(⍳N)aisni¨⊂W
    Z←⍉(4,N)⍴Z
```

```
    Z←N rend10 W
    Z←N iani W
    Z←Z,N aiani W
```

```
      20 rend9 0.05 0.1
 0.952381  1         1         1.05
 1.95011   2.04762   2.15      2.2575
 2.98672   3.13605   3.4575    3.63038
 4.05623   4.25904   4.93037   5.17689
 5.15317   5.41083   6.57689   6.90574
 6.27249   6.58612   8.40574   8.82603
 7.40958   7.78006  10.426    10.9473
 8.56021   8.98822  12.6473   13.2797
 9.7205   10.2065   15.0797   15.8337
10.8869   11.4313   17.7337   18.6204
12.0563   12.6591   20.6204   21.6514
13.2257   13.8869   23.7514   24.9389
14.3924   15.112    27.1389   28.4959
15.554    16.3317   30.7959   32.3357
16.7085   17.5439   34.7357   36.4725
17.8537   18.7464   38.9725   40.9211
18.9881   19.9375   43.5211   45.6972
20.11     21.1155   48.3972   50.817
21.2181   22.279    53.617    56.2979
22.3111   23.4266   59.1979   62.1578
```

```
      999 rend10 0.05 0.1
60 63
```

Esercizio 2.10 (2) - Rendite in progressione aritmetica >>>

```
[0]     Z←rend11 WW;W;K;NW;NK
[1]     (W K NW NK G)←WW
[2]     Z←(W×⍳NW)∘.iani(K×⍳NK),¨G
```

```
                rend11 1 0.02 10 6 1
 0.980392  0.961538  0.943396  0.925926  0.909091  0.892857
 2.90273   2.81065   2.72339   2.6406    2.56198   2.48724
 5.7297    5.47764   5.24225   5.0221    4.81593   4.62259
 9.42508   8.89686   8.41062   7.96222   7.54798   7.16466
13.9537   13.0065   12.1469   11.3651   10.6526   10.0018
19.2816   17.7484   16.3767   15.1462   14.0394   13.0416
25.3755   23.0678   21.0321   19.2306   17.6315   16.208
32.2034   28.9133   26.0514   23.5527   21.3636   19.4391
39.7342   35.2366   31.3785   28.055    25.1805   22.6846
47.9377   41.9922   36.9624   32.6869   29.0359   25.9043
```

Esercizio 2.10 (3) - Rendite in progressione aritmetica >>>

```
      1000×(13 999) aiani¨⊂0.06 0.4
28872.125 135444.44
```

Esercizio 2.11 (1) - Rendite in progressione geometrica >>>

```
[0]   Z←N gani W;I;G
[1]   (I G)←W ⋄ Z←(N ani(I-G)÷1+G)÷1+G
```

```
[0]   Z←N agani W;I;G
[1]   (I G)←W ⋄ Z←(ri I)×N gani W
```

```
[0]   Z←N gsni W;I;G
[1]   (I G)←W ⋄ Z←((ri I)*N)×N gani W
```

```
[0]   Z←N agsni W;I;G
[1]   (I G)←W ⋄ Z←(ri I)×N gsni W
```

```
[0]     Z←N rend12 W
[1]     Z←(⍳N)gani¨⊂W
[2]     Z←Z,(⍳N)agani¨⊂W
[3]     Z←Z,(⍳N)gsni¨⊂W
[4]     Z←Z,(⍳N)agsni¨⊂W
[5]     Z←⍉(4,N)⍴Z
```

```
[0]     Z←N rend13 W
[1]     Z←N gani W
[2]     Z←Z,N agani W
```

```
      20 rend12 0.05 0.03
 0.952381  1         1         1.05
 1.88662   1.98095   2.08      2.184
 2.80307   2.94322   3.2449    3.40715
 3.70206   3.88716   4.49987   4.72487
 4.58392   4.81312   5.85037   6.14289
 5.44899   5.72144   7.30217   7.66728
 6.29758   6.61246   8.86133   9.30439
 7.13001   7.48651  10.5343   11.061
 7.94658   8.34391  12.3278   12.9441
 8.7476    9.18498  14.2489   14.9614
 9.53336  10.01     16.3053   17.1205
10.3041   10.8194   18.5048   19.43
11.0603   11.6133   20.8558   21.8986
11.802    12.3921   23.3671   24.5354
12.5296   13.156    26.048    27.3504
13.2433   13.9054   28.9084   30.3538
13.9434   14.6406   31.9585   33.5565
14.6302   15.3617   35.2093   36.9698
15.3039   16.0691   38.6722   40.6058
15.9648   16.763    42.3593   44.4773
```

```
      999 rend13 0.05 0.03
50 52.5
```

Esercizio 2.11 (2) - Rendite in progressione geometrica >>>

```
[0]   Z←rend14 WW;W;K;NW;NK
[1]   (W K NW NK G)←WW
[2]   Z←(W×⍳NW)∘.gani(K×⍳NK),¨G
```

```
          rend14 1 0.02 10 6 ¯0.25
0.980392 0.961538 0.943396 0.925926 0.909091 0.892857
1.70127  1.65496  1.61089  1.56893  1.52893  1.49075
2.23133  2.15502  2.08318  2.01546  1.95154  1.89113
2.62107  2.51564  2.41734  2.32555  2.23969  2.15924
2.90765  2.7757   2.65378  2.54089  2.43615  2.33878
3.11837  2.96324  2.82107  2.69043  2.5701   2.459
3.27331  3.09849  2.93944  2.79428  2.66143  2.53951
3.38724  3.19603  3.02319  2.8664   2.7237   2.59342
3.47101  3.26637  3.08244  2.91648  2.76616  2.62952
3.5326   3.31709  3.12437  2.95126  2.79511  2.6537
```

Esercizio 2.11 (3) - Rendite in progressione geometrica >>>

```
      1000×(13 999) agani¨⊂0.06 0.03
11006.125 35333.333
```